

Processus Stochastiques

Estimation - Filtrage

André Monin
LAAS-CNRS

Université de Toulouse
7 ave du Colonel Roche - 31077 Toulouse Cedex 4

09/2009

TABLE DES MATIÈRES

I	Processus Stochastiques	3
1	Eléments de la théorie des probabilités	4
1.1	Définitions	4
1.1.1	Espace probabilisé	4
1.1.2	Probabilité conditionnelle - Evénements indépendants	5
1.2	Variables aléatoires	6
1.2.1	Variables aléatoires réelles scalaires	6
1.2.2	Variables aléatoires vectorielles	9
1.3	Variables aléatoires gaussiennes	14
1.3.1	Définition	14
1.3.2	Propriétés génériques	14
1.3.3	Moments centrés	18
1.4	Théorèmes limites	18
1.4.1	Loi des grands nombres	18
1.4.2	Théorème central-limite	19
2	Processus stochastiques markoviens	21
2.1	Définition et classification des processus stochastiques	21
2.1.1	Processus stochastiques	21
2.1.2	Processus markoviens	23
2.2	Bruits blancs	25
2.2.1	Processus continu à accroissements indépendants : le mouvement brownien	26
2.2.2	Processus discontinu à accroissements indépendants	28
2.2.3	Bruits blancs à temps continu	32
2.3	Caractérisation des processus markovien	36
2.3.1	Processus discrets à temps discret	36
2.3.2	Processus discrets à temps continu	38
2.3.3	Processus continus à temps discret	39
2.3.4	Processus continu à temps continu	41
2.3.5	Processus hybrides	43
2.4	Modélisation à temps discret des processus stochastiques markoviens	44
2.4.1	Modèle à temps discret d'un système dynamique stochastique	44
2.4.2	Echantillonnage d'un signal continu	46
2.4.3	Echantillonnage d'un signal bruité	47
A	Preuve du théorème "produit de gaussiennes"	49
B	Représentation spectrale des processus	51
B.1	Densité spectrale de puissance	51
B.2	Transformations linéaires	51

II	Filtrage des Systèmes Markoviens	53
3	Estimation et Détection Optimale	54
3.1	Espace d'état continu	54
3.1.1	Modèle d'estimation des processus continus	54
3.1.2	Observabilité des systèmes dynamiques continus	55
3.1.3	Critères d'estimation	58
3.1.4	Filtrage à minimum de variance	60
3.1.5	Filtrage à maximum de vraisemblance	62
3.2	Espace d'état discret	63
3.2.1	Modèles d'estimation des processus discrets	63
3.2.2	Critères d'estimations	64
3.2.3	Filtrage à maximum de vraisemblance <i>a posteriori</i>	64
3.2.4	Filtrage à maximum de vraisemblance	67
3.3	Espace d'état hybride et détection	69
3.3.1	Le problème de détection	69
3.3.2	Critères de détection	70
3.3.3	Cas des systèmes markoviens	72
4	Techniques numériques de filtrage	75
4.1	Filtrage et détection optimal en dimension finie	75
4.1.1	Systèmes linéaires gaussiens : le filtre de Kalman	75
4.1.2	Filtres de Kalman en parallèle	78
4.1.3	Détection de signaux gaussiens.	80
4.2	Approximations numériques du filtrage optimal	82
4.2.1	Linéarisation : le filtre de Kalman étendu	82
4.2.2	Discrétisation de l'espace d'état	87
4.2.3	Méthodes séquentielles de Monte-Carlo	94
4.2.4	Mélange de gaussiennes	99

Première partie

Processus Stochastiques

1. ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS

La théorie des probabilités a pour objectif de représenter des états ou des événements ayant trait à des systèmes pour lesquels l'observateur ne dispose pas d'une information complète lui permettant de décrire exactement ce système. Ainsi, une variable peut être aléatoire pour un observateur et non pour un autre. Par exemple, si on observe un avion évoluant dans le ciel depuis le sol, les mouvements de cet avion sont pour nous en grande partie imprévisibles car nous ne connaissons pas les décisions que le pilote va prendre dans le futur. Pour un contrôleur du ciel, en liaison radio avec le pilote, le mouvement de l'avion est davantage prévisible grâce aux informations que lui fournit celui-ci. Enfin, pour le pilote lui-même, les mouvements de son avion sont très prévisibles du fait qu'il agit lui-même sur les gouvernes. Il reste cependant une part d'aléa (faible, heureusement !) du fait que le pilote ignore les perturbations atmosphériques qu'il est susceptible de rencontrer sur son parcours. Enfin, si nous étions capables de modéliser et de mesurer parfaitement tous les éléments qui agissent sur le mouvement de cet avion (commandes du pilote, perturbations et leurs effets,...), son comportement ne serait plus du tout aléatoire. De même, lorsqu'on lance une pièce de monnaie en l'air et qu'on observe sur quelle face elle va retomber, pour nous, la variable pile ou face est parfaitement aléatoire. Cependant, une modélisation parfaite de la pièce, de l'état de l'air dans lequel elle est plongée, une mesure parfaite de sa vitesse, ... devraient permettre de déterminer le résultat de l'expérience. C'est parce que nous sommes incapables de faire cette modélisation ou que nous y renonçons qu'il est nécessaire d'introduire cet outil de représentation que sont les probabilités.

Cette représentation repose sur la notion de mesure au sens de l'analyse fonctionnelle. La connaissance qu'on a sur une quantité aléatoire, dont on connaît le domaine d'appartenance, sera représentée à travers une pondération des points ou sous ensembles de ce domaine, plus ou moins forte en fonction du degré de confiance qu'on attribue à telle ou telle zone.

1.1. Définitions

1.1.1. Espace probabilisé

On considère un univers Ω , un ensemble d'événements élémentaires qui seront susceptibles de décrire un système. Chaque élément de l'univers Ω est appelé *possible*. Afin d'énumérer de manière exhaustive toutes les combinaisons imaginables de possibles, on construit la *tribu* engendrée par Ω . Chaque élément ω de la tribu est appelé événement.

Définition 1. Une tribu $\mathcal{T}(\Omega)$ est un ensemble des parties de Ω qui possède les propriétés suivantes :

- $\Omega \in \mathcal{T}(\Omega)$ (Tous les possibles sont dans la tribu)
- $\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}(\Omega), \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}(\Omega)$ (Stabilité par union dénombrable)
- $\forall A \in \mathcal{T}(\Omega), \Omega \setminus A \in \mathcal{T}(\Omega)$ (L'événement "non A" est dans la tribu).

Ainsi, on trouve dans la tribu toutes conjonctions de possibles (union) et toute absence possibles. De ce fait, une tribu est aussi appelée σ -algèbre.

A chaque événement $\omega \in \mathcal{T}(\Omega)$ ainsi défini, on attribue un certain "poids" destiné à mesurer la possibilité que cet événements se réalise. Pour mesurer la probabilité d'occurrence

d'un élément ω de la tribu, on introduit donc une application \mathbb{P} sur l'espace $\mathcal{T}(\Omega)$ à valeurs dans l'intervalle $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Cette application doit vérifier les propriétés suivantes.

Définition 2. Une probabilité \mathbb{P} est une application de $\mathcal{T}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ telle que :

- $\forall A \in \mathcal{T}(\Omega), \mathbb{P}(A) \geq 0$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1, \mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}(\Omega) / n \neq m \implies A_n \cap A_m = \emptyset, \mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ (Propriété dite de sigma-additivité).

Le triplé $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), \mathbb{P})$ s'appelle un espace probabilisé.

Cette définition rejoint naturellement la notion intuitive de probabilité. En particulier, la probabilité de sigma-additivité décrit que la probabilité de que A "arrive" ou que B "arrive" est la somme de la probabilité de chacun des événements si ceux-ci sont exclusifs l'un de l'autre.

Cette application ainsi définie possède donc toutes les propriétés d'une mesure positive bornée (mesure de Radon). C'est pour cette raison que la théorie des probabilités repose sur la théorie des mesures. La quantité $\mathbb{P}(A)$ correspond à la notion intuitive de "probabilité pour que l'ensemble d'événements contenus dans A se réalise".

Remarque 3. Ce point est très important car il fait toute l'originalité de théorie des probabilités : comme on ne peut pas être "sûr" qu'un événement se réalise, on se contente de "mesurer" la possibilité que celui-ci se réalise avec un certain nombre réel mesurant le niveau de confiance qu'on accorde à l'événement. Si ce nombre est égale à 1, on est "sûr"¹ que l'événement se réalise. S'il est égale à 0, cet événement est impossible et entre les deux ...

1.1.2. Probabilité conditionnelle - Événements indépendants

La probabilité conditionnelle d'un élément de $\mathcal{T}(\Omega)$ se définit comme :

Définition 4. La probabilité conditionnelle de l'événement A sachant B tel que $\mathbb{P}(B) > 0$ est définie par :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Deux événements sont dits indépendants si la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de réalisation l'autre.

Définition 5. Les événements A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ ou bien $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.

Par conséquent, en vertu de la définition 4, deux événements indépendants sont tels que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

La règle dite de "Bayes" est une formule qui permet d'inverser le conditionnement des probabilités conditionnelles. Rappelons en son énoncé.

Théorème 6. Règle de Bayes : $\forall A, B \in \mathcal{T}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Preuve. Cette formule s'obtient immédiatement en utilisant la définition 4 et le fait que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap A)$. On en déduit en effet que

$$\mathbb{P}(A|B) \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \mathbb{P}(A)$$

■

¹La terminologie exacte est "presque sûr"

1.2. Variables aléatoires

Dans la pratique, il est illusoire de travailler directement sur l'espace des possibles qui sont à la source des phénomènes que l'on souhaite décrire. Aussi, est-on rapidement amené à mesurer leurs effets à travers des quantités physiques (variables réelles continues telles que tension, fréquence d'un signal, vitesse d'un mobile, température, concentration d'un produit ...), ou bien par un ensemble de "symboles", en nombre fini ou seulement dénombrable. Il s'agit par exemple d'une situation où plusieurs modes de fonctionnement d'un système sont possibles, chacun étant décrit par un symbole particulier. De telles quantités engendrées par des événements aléatoires s'appellent variables aléatoires. Les espaces de réalisation de ces variables aléatoires seront donc isomorphes à des espaces vectoriels tels que \mathbb{R} ou \mathbb{R}^n pour les variables continues et à \mathbb{N} ou une partie de \mathbb{N} pour des variables discrètes.

Définition 7. Une variable aléatoire est une application X de $\Omega \longrightarrow E$ où E est l'espace des réalisations (\mathbb{R} , \mathbb{R}^n , \mathbb{N} , ...) telle que :

$$\forall A \in \mathcal{T}(E), \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\} \in \mathcal{T}(\Omega)$$

Sa mesure de probabilité, dite probabilité image, est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{T}(E), \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}_\Omega(\omega \in \Omega / X(\omega) \in A)$$

Cette formulation permet de travailler alors sur la probabilité image plutôt que sur celle définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), \mathbb{P}_\Omega)$, soit l'espace $(E, \mathcal{T}(E), \mathbb{P}_X)$, celui-ci étant généralement plus aisé à manipuler dans les cas cités.

Notation 8. Dans la suite, nous noterons indifféremment $\mathbb{P}_X(A)$ ou $\mathbb{P}(X \in A)$ en fonction du contexte. La première écriture se réfère plutôt à l'idée de mesure d'un ensemble A alors que la seconde illustre davantage l'aspect "probabilité que l'événement A se réalise". Naturellement, ces deux notions se confondent. Par exemple, pour deux événements A et B de la tribu, on écrira :

$$\mathbb{P}_X(A \cap B) = \mathbb{P}(X \in A \wedge X \in B)$$

où le symbole $X \in A \wedge X \in B$ désigne la conjonction de $X \in A$ et $X \in B$.

1.2.1. Variables aléatoires réelles scalaires

Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}$, la tribu engendrée s'appelle la tribu de Borel (Notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$), tribu engendrée par les intervalles ouverts (ou fermé) de \mathbb{R} , en particulier l'ensemble des intervalles du type $\{(-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$. La probabilité d'un élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ s'écrit alors en utilisant la théorie classique de la mesure sur \mathbb{R} :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X(A) = \int_A \mathbb{P}_X(dx)$$

où $\mathbb{P}_X(dx)$ désigne la différentielle de la mesure qui s'interprète comme la mesure de l'intervalle infinitésimal $[x, x + dx]$.

Notation 9. On note parfois l'élément différentiel de la mesure $d\mathbb{P}_X(x)$. Nous préférons ici la notation $\mathbb{P}_X(dx)$ qui fait apparaître explicitement la mesure, en tant qu'application qui l'intervalle infinitésimal dx associe le nombre réel $\mathbb{P}_X(dx)$. Pour être exhaustif, il serait nécessaire de préciser que la mesure s'applique à un intervalle situé au voisinage du point x , soit $\mathbb{P}_X(dx, x)$ traduisant par là clairement que la mesure s'applique à l'intervalle $[x, x + dx]$. nous n'utiliserons pas celle-ci ici parce que jugée trop lourde.

Fonction de répartition et densité de probabilité

On peut décrire toute variable aléatoire X réelle exhaustivement à travers la mesure \mathbb{P}_X de l'ensemble des intervalles qui engendrent la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, soit $\{\mathbb{P}_X((-\infty, x]), x \in \mathbb{R}\}$, en utilisant la propriété de sigma-additivité. C'est ce que fait la primitive de la mesure \mathbb{P}_X qualifiée dans ce contexte de fonction de répartition :

Définition 10. *La fonction de répartition de la variable aléatoire réelle X est une fonction continue à droite définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^x \mathbb{P}_X(dx)$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle possède les propriétés suivantes.

Propriété 11. $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \geq 0$

Propriété 12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$

Propriété 13. $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$

Propriété 14. $F_X(x)$ est croissante et $\forall a, b \in \mathbb{R}, \mathbb{P}_X([a, b]) = F_X(b) - F_X(a)$

La propriété 11 résulte du fait qu'une probabilité est toujours positive. La propriété 12 vient de $\mathbb{P}_X(\emptyset) = 0$ et la propriété 13 de $\mathbb{P}_X(E) = 1$. La propriété 14 résulte de la propriété de sigma-additivité de la probabilité \mathbb{P}_X . En effet :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X([a, b]) &= \mathbb{P}(X \in [a, b]) \\ &= \mathbb{P}(X \leq b \wedge X > a) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X > b \vee X \leq a) \\ &= 1 - (\mathbb{P}(X > b) + \mathbb{P}(X \leq a)) \\ &= 1 - (1 - \mathbb{P}(X \leq b) + \mathbb{P}(X \leq a)) \\ &= \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) \end{aligned}$$

La mesure de probabilité \mathbb{P}_X d'une variable aléatoire X réelle peut donc être vue comme la dérivée, au sens des distributions de sa fonction de répartition.

Décomposition des mesures de probabilité

Un théorème important dû à Lebesgue précise la nature topologique des mesures.

Théorème 15. *Toute mesure de probabilité se décompose de manière unique comme la somme d'une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et d'une mesure singulière.*

Rappelons que la mesure de Lebesgue est la mesure qui associe à tout intervalle $[a, b]$ sa longueur, soit $b - a$. Sur \mathbb{R} , elle on note sa différentielle sous la forme dx . Une mesure singulière, ou étrangère, est une mesure non nulle sur un ensemble de mesure nulle par rapport à la mesure de Lebesgue. L'exemple type de mesure singulière est la mesure de Dirac qui charge un point, ensemble qui est bien de mesure nulle par rapport à la mesure de Lebesgue.

De plus, la partie singulière peut être décomposée de manière unique en une partie continue et une partie discrète. Cette partie discrète se définit comme une mesure qui charge un ensemble

de points. C'est donc une combinaison linéaire de mesures de Dirac. L'exemple type de mesure singulière continue sur \mathbb{R} est l'escalier de Cantor. A observer cet exemple, on peut sans grand risque conclure que les mesures singulières sur \mathbb{R} se réduisent à leur partie discrète. Si on écarte donc la composante quelque peu exotique qu'est la partie singulière continue, on pourra considérer qu'une mesure de probabilité sur \mathbb{R} s'écrit en général :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}_X(dx) = p_X(x)dx + \sum_{i \in \mathcal{I}} \rho_i \delta_{x_i}(dx) \quad (1.1)$$

où $p_X(x)$ désigne la partie continue de la mesure, dite "diffuse", \mathcal{I} est un ensemble (dénombrable) d'indices, $\delta_{x_i}(x)$ est la mesure de Dirac concentrée au point x_i et ρ_i la charge de ce point. On note parfois, de manière moins rigoureuse, $\delta_{x_i}(dx) = \delta_{x_i}(x)dx$. La normalisation de cette mesure impose que :

$$\int_{\mathbb{R}} p_X(x)dx + \sum_{i \in \mathcal{I}} \rho_i = 1$$

Si on considère la mesure de l'intervalle infinitésimal $[x, x + dx]$, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(dx) &= p_X(x)dx, \forall x \notin \{x_i, i \in \mathcal{I}\} \\ &= \rho_i, \forall x = x_i \end{aligned}$$

Dans le cas où la fonction de répartition est dérivable (mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue), cette mesure se résume à sa densité définie par :

Définition 16. *La densité de probabilité d'une variable aléatoire X est la dérivée (ordinaire) de sa fonction de répartition.*

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Remarque 17. *Une densité de probabilité possède une dimension, inverse de la dimension de la variable X .*

Remarque 18. *Si la fonction de répartition comporte des points de discontinuité, la dérivée au sens des distributions en ces points est une distribution, mesure de Dirac en ce point dont la masse est égale à l'amplitude de la discontinuité.*

Moments et cumulants d'une variable aléatoire réelle

La définition de la mesure de probabilité permet d'introduire la notion d'espérance mathématique qui s'interprète comme la valeur moyenne d'une fonction quelconque d'une variable aléatoire réelle.

Définition 19. *L'espérance mathématique de la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable vis-à-vis de la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X(x)$ de la variable aléatoire réelle X est égale à l'intégrale :*

$$\mathbb{E}[\varphi] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathbb{P}_X(dx)$$

Si on considère la décomposition de la mesure en sa partie continue et sa partie discrète 1.1, on obtient la décomposition de l'espérance suivante :

$$\mathbb{E}[\varphi] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) p_X(x) dx + \sum_{i \in \mathcal{I}} \rho_i \varphi(x_i)$$

Dans le cas d'une loi à densité, cette intégrale se calcule dans le sens usuel comme intégrale de Lebesgue :

$$\mathbb{E}[\varphi] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) p_X(x) dx$$

Si la fonction φ est égale à une puissance de x , on parle de "moments" de la variable aléatoire. C'est un autre moyen de caractériser la loi d'une variable aléatoire à travers ce qu'on appelle sa fonction caractéristique.

Définition 20. Le moment d'ordre n d'une variable aléatoire X de mesure de probabilité $\mathbb{P}_X(x)$ est le réel défini par :

$$M_n \triangleq \int_{\mathbb{R}} x^n \mathbb{P}_X(dx)$$

Définition 21. Le moment centré d'ordre n d'une variable X de mesure de probabilité $\mathbb{P}_X(x)$ est le réel défini par :

$$\widetilde{M}_n \triangleq \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^n \mathbb{P}_X(dx)$$

où μ est la moyenne de X .

Définition 22. La fonction caractéristique d'une variable aléatoire X est la fonction analytique $\Phi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie comme la transformée de Fourier inverse de sa mesure de probabilité, soit :

$$\begin{aligned} \Phi_X(u) &= \mathbb{E}[e^{iux}] \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \mathbb{P}_X(dx) \end{aligned}$$

Si on développe cette expression, on obtient l'expression analytique de la fonction caractéristique à partir de ses moments $M_n = \mathbb{E}[x^n]$:

$$\Phi_X(u) = \sum_{n \geq 0} \frac{(iu)^n}{n!} M_n$$

Ainsi, la loi de probabilité d'une variable aléatoire est parfaitement définie à partir de l'ensemble de ses moments.

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle étant telle que $\Phi_X(0) = 1$, le logarithme népérien de celle-ci est bien défini au voisinage de 0. Cette fonction est appelée fonction génératrice des cumulants. Les coefficients de son développement en série de Taylor sont les cumulants de la variable aléatoire.

Définition 23. Si une variable aléatoire réelle possède $\Phi_X(u)$ comme fonction caractéristique, ses cumulants C_n sont définis par :

$$\log(\Phi_X(u)) = \sum_{n \geq 1} \frac{(iu)^n}{n!} C_n \quad (1.2)$$

1.2.2. Variables aléatoires vectorielles

La plupart des notions introduites pour décrire les variables aléatoires réelles scalaires peuvent être étendues aux variables aléatoires réelles vectorielles, comme on étend la notion de mesure sur \mathbb{R} à celle des mesures sur \mathbb{R}^n . A une variable aléatoire $X \in \mathbb{R}^n$ de composantes (X_1, \dots, X_n) , on associe sa mesure de probabilité multi-dimensionnelle \mathbb{P}_X définie sur la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. On écrira :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{P}_X(A) = \int_A \mathbb{P}_{X_1 \dots X_n}(dx_1 \dots dx_n)$$

Fonction de répartition

La tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est la tribu engendrée par les pavés ouverts (ou fermés) de \mathbb{R}^n , en particulier l'ensemble des intervalles du type $\{(-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n], \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$. Si on note $X = [X_1 \dots X_n]^T$ les coordonnées de la variable aléatoire X , la fonction de répartition multi-variable est définie comme la primitive de sa mesure de probabilité :

Définition 24. La fonction de répartition d'une variable aléatoire vectorielle de \mathbb{R}^n est une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} définie par :

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1 \wedge \dots \wedge X_n \leq x_n)$$

Définition 25. La mesure de probabilité d'une variable aléatoire de \mathbb{R}^n est définie, au sens des distributions, comme la mesure satisfaisant la relation suivante :

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \mathbb{P}_{X_1, \dots, X_n}(dx_1, \dots, dx_n)$$

Contrairement au cas scalaire, les ensembles de \mathbb{R}^n qui sont de mesure nulle ne sont pas rares. Il suffit de considérer un sous-espace de dimension $< n$, comme une droite dans \mathbb{R}^2 ou une surface dans \mathbb{R}^3 . La décomposition des mesures en leurs parties absolument continues, singulière et discrète est donc peu utilisable en pratique.

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire vectorielle se définit comme la transformée multi-variable de sa mesure de probabilité. Si on note :

$$x^T y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

le produit scalaire de \mathbb{R}^n , on aura :

Définition 26. La fonction caractéristique d'une variable aléatoire vectorielle de \mathbb{R}^n de mesure de probabilité $\mathbb{P}_{X_1, \dots, X_n}$ est la transformée de Fourier inverse à plusieurs variables de cette mesure de probabilité :

$$\begin{aligned} \Phi_X(u) &= \mathbb{E}[e^{iu^T x}] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{iu^T x} \mathbb{P}_X(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{i \sum_{k=1}^n x_k u_k} \mathbb{P}_{X_1 \dots X_n}(dx_1 \dots dx_n) \end{aligned}$$

Lois marginales

Dans le cas vectoriel, il est possible de définir la loi marginale d'une des composantes de la variable comme étant la loi qui régit cette variable, indépendamment des valeurs que peuvent prendre les autres composantes.

Définition 27. La loi marginale de la variable X_i , composante de la variable $X \in \mathbb{R}^n$ est définie comme :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_{X_i}(A) = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_A \dots \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_{X_1, \dots, X_n}(dx_1, \dots, dx_n)$$

où la sommation sur l'espace A est relative à la variable x_i .

Dans le cas d'une mesure à densité (absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue), on obtient la densité marginale de la variable X_i par l'expression suivante :

$$\forall x_i \in \mathbb{R}, p_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n$$

où la sommation est restreinte à l'ensemble $\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$.

Probabilité conditionnelle

Considérons deux variables aléatoires X et Y , conjointement distribuées selon une mesure de probabilité conjointe $\mathbb{P}_{Y,X}$. On souhaite définir la mesure de probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{Y|X}$. Si on se réfère à la définition générale 4, cette mesure peut être définie comme suit.

Définition 28. La mesure de probabilité conditionnelle de la variable $Y \in \mathbb{R}$ sachant $X \in \mathbb{R}$ est la mesure de probabilité $\mathbb{P}_{Y|X}$ telle que :

$$\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ / } \mathbb{P}(X \in A) > 0, \mathbb{P}(Y \in B | X \in A) \triangleq \frac{\mathbb{P}(Y \in B \wedge X \in A)}{\mathbb{P}(X \in A)} \quad (1.3)$$

Cette première définition demeure incomplète. En effet, un problème se pose évidemment si $\mathbb{P}(X \in A) = 0$, la définition n'ayant plus de sens. Or, dans son utilisation pratique, si par exemple X est un processus observé (connu), on souhaiterait définir ce que devient la mesure de probabilité de Y quand on observe $X = x$ (et non pas $X \in A$). Il est donc naturel de chercher à définir formellement $\mathbb{P}(Y \in B | X = x)$, quand bien même $X = x$ est une événement de probabilité nulle si la mesure \mathbb{P}_X est diffuse (absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue). Pour ce faire, on introduit cette probabilité conditionnelle par un procédé limite comme suit :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}(Y \in B | X = x) \triangleq \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(Y \in B \wedge X \in]x, x + dx])}{\mathbb{P}(X \in]x, x + dx])}$$

La probabilité conditionnelle apparaît alors définie à partir d'un procédé de type dérivation (dite dérivé de Radon-Nikodym [1]).

Ainsi, pour x fixé, $\mathbb{P}(Y \in B | X = x)$ est une mesure de probabilité. En revanche, pour B fixé, $\mathbb{P}(Y \in B | X = x)$ est une fonction de x (et non pas une distribution). Ceci revient à définir la probabilité conditionnelle comme étant la fonction qui satisfait :

Définition 29. La mesure de probabilité conditionnelle de la variable $Y \in \mathbb{R}$ sachant $X = x$ est la mesure de probabilité $\mathbb{P}_{Y|X}$ fonction de x qui vérifie la relation :

$$\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}(Y \in B \wedge X \in A) = \int_A \mathbb{P}(Y \in B | X = x) d\mathbb{P}_X(x) \quad (1.4)$$

Pour garantir la consistance de cette définition, il faut s'assurer que $\mathbb{P}(Y \in B | X = x)$ est bien définie et unique. De fait, comme $(A \cap B) \subset A$, il est clair que :

$$\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}(Y \in B \wedge X \in A) \leq \mathbb{P}(X \in A)$$

Par conséquent, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\mathbb{P}(X \in A) = 0$, nécessairement $\mathbb{P}(Y \in B \wedge X \in A) = 0$. L'application du théorème de Radon-Nikodym permet de conclure que $\mathbb{P}(Y \in B | X = x)$ est une densité (par rapport à x), donc une fonction et que, par conséquent, $\mathbb{P}(Y \in B | X = x)$ est défini de manière unique par l'expression 1.4. (Plus précisément, il n'existe pas de fonction différente de $\mathbb{P}(Y \in B | X = x)$ qui coïnciderais avec $\mathbb{P}(Y \in B | X = x)$ sauf sur une ensemble de mesure non-nulle par rapport à \mathbb{P}_X). On pourrait dire que la mesure de probabilité $\mathbb{P}(Y \in B | X = x)$ est une fonction de x du fait que dans le rapport 1.3 "les singularités présentes au numérateur et au dénominateur se compensent".

On pourra donc formellement noter :

$$\mathbb{P}_{Y|X}(dy|x) \triangleq \mathbb{P}(Y \in [y, y + dy] | X = x)$$

L'existence de la mesure de probabilité conditionnelle ainsi définie permet d'écrire alors sa valeur sur tout intervalle $[y, y + dy]$ sous la forme suivante :

$$\mathbb{P}_{Y|X}(dy|x) = \frac{\mathbb{P}_{Y,X}(dy, dx)}{\mathbb{P}_X(dx)}$$

bien que, en général, le rapport de mesures ne soit pas toujours défini. Cette expression est cependant bien définie en tant que dérivée de Radon-Nikodym. Cette convention permet de mettre en évidence que $\mathbb{P}_{Y|X}(dy|x)$ est une mesure par rapport à la variable y et une fonction par rapport à la variable x .

Dans le cas où toutes les mesures sont à densité, cette expression devient :

$$p_{Y|X}(x|y) dy = \frac{p_{Y,X}(y, x) dx dy}{p_X(x) dx}$$

Ceci se traduit alors sur les densités de probabilité par :

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}$$

Théorème 30. Règle de Bayes.

$$\mathbb{P}_{Y|X}(dy|x) = \frac{\mathbb{P}_{X|Y}(dx|y) \mathbb{P}_Y(dy)}{\mathbb{P}_X(dx)}$$

Preuve. Il suffit d'écrire que

$$\mathbb{P}_{Y,X}(dy, dx) = \mathbb{P}_{Y|X}(dy|x) \mathbb{P}_X(dx) = \mathbb{P}_{X|Y}(dx|y) \mathbb{P}_Y(dy)$$

■

Changement de variable

Théorème 31. Si deux variables aléatoires X et Y sont liées par une relation bijective déterministe du type $Y = f(X)$, la densité de probabilité de Y s'obtient à partir de la densité de probabilité de X de la manière suivante :

$$p_Y(y) = p_X(f^{-1}(y)) \left| \frac{\partial}{\partial y} f^{-1}(y) \right| \quad (1.5)$$

où $\left| \frac{\partial}{\partial y} f^{-1}(y) \right|$ désigne la valeur absolue du déterminant de la matrice Jacobienne (le jacobien) de la fonction .

Preuve. Pour tout borélien A de \mathbb{R}^n , la liaison entre X et Y se traduit par :

$$\mathbb{P}(Y \in A) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(A))$$

qui, traduit en terme intégrale, conduit à :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \in A) &= \int_{f^{-1}(A)} p_X(x) dx \\ &= \int_A p_X(f^{-1}(y)) \left| \frac{\partial}{\partial y} f^{-1}(y) \right| dy \end{aligned}$$

après le changement de variable $y = f(x)$. ■

Théorème 32. *La loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est égale à la convolution de leurs lois.*

Preuve. Considérons deux variables aléatoires X_1 et X_2 de densités de probabilités respectivement égales à $p_{X_1}(x_1)$ et $p_{X_2}(x_2)$ et intéressons nous à la densité de probabilité de leur somme $Y = X_1 + X_2$. Il est clair que cette relation n'est pas inversible. Cependant, si on considère les variables Y_1 et Y_2 définies par :

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + X_2 \\ Y_2 &= X_2 \end{aligned}$$

la relation liant Y_1 et Y_2 est alors inversible. Si on applique la relation 1.5 à ce problème, le jacobien de l'application étant unitaire, on obtient la relation :

$$p_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = p_{X_1, X_2}(y_1 - y_2, y_2)$$

Si de plus, les variables X_1 et X_2 sont indépendantes, on peut alors écrire :

$$p_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = p_{X_1}(y_1 - y_2)p_{X_2}(y_2)$$

En calculant la loi marginales de Y_1 , par intégration sur l'ensemble des valeurs de Y_2 , on obtient :

$$\begin{aligned} p_{Y_1}(y_1) &= \int_{\mathbb{R}} p_{X_1}(y_1 - y_2)p_{X_2}(y_2)dy_2 \\ &= p_{X_1} * p_{X_2}(y_1) \end{aligned}$$

Ainsi, la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est égale à la convolution de leurs lois. ■

Corollaire 33. *La fonction caractéristique de la somme de deux variables aléatoires indépendante est égale au produit des fonctions caractéristiques de chacune des variables.*

Preuve. Se déduit immédiatement du fait que le produit de convolution se transforme en produit après transformée de Fourier. ■

L'hypothèse d'inversibilité de la fonction f n'est pas nécessaire pour que la densité de probabilité de Y soit définie. Cette hypothèse est seulement nécessaire au calcul explicite de celle-ci par la formule proposée.

Exemple 34. Soient deux variables aléatoires de \mathbb{R} liées par la relation $Y = |X|$. Formellement

$$\begin{aligned} \forall y < 0, \mathbb{P}(y \leq Y < y + dy) &= 0 \\ \forall y \geq 0, \mathbb{P}(y \leq Y < y + dy) &= \mathbb{P}(y \leq X < y + dy \wedge -(y + dy) < X \leq -y) \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(y \leq X < y + dy \wedge -(y + dy) < X \leq -y) &= \mathbb{P}(y \leq X < y + dy) + \mathbb{P}(-(y + dy) < X \leq -y) \\ &= p_X(y)dy + p_X(-y)dy \end{aligned}$$

les deux ensembles étant disjoints. On a donc finalement :

$$\begin{aligned} \forall y < 0, p_Y(y) &= 0 \\ \forall y \geq 0, p_Y(y) &= p_X(y) + p_X(-y) \end{aligned}$$

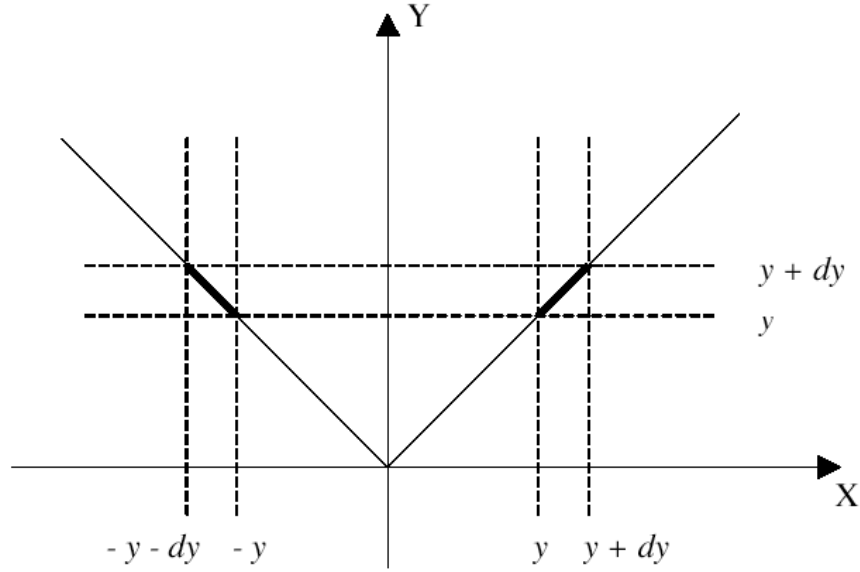


FIG. 1.1 – Exemple de changement de variable

1.3. Variables aléatoires gaussiennes

La loi gaussienne (ou normale) joue un rôle fondamental dans la théorie des probabilités en vertu, en particulier, de ses propriétés liées à la loi des grands nombres. C'est une distribution qui est naturellement présente dans beaucoup de situations pratiques. Elle se définit ainsi :

1.3.1. Définition

Définition 35. Une variable aléatoire X de \mathbb{R}^n est distribuée selon une loi de moyenne $\mathbb{E}[x] = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}^n$ et de matrice de covariance (symétrique et définie positive) $P = \mathbb{E}[(x - \mu)(x - \mu)^T]$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si sa densité de probabilité est égale à :

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |P|}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T P^{-1}(x-\mu)}$$

où $|P|$ désigne le déterminant de la matrice P .

Nous noterons $\Gamma(x - \mu; P) \triangleq p_X(x)$ cette densité de probabilité.

Il est important de noter qu'une telle loi est entièrement déterminée par les seuls paramètres que sont sa moyenne $\mu \in \mathbb{R}^n$ et sa matrice de covariance $P \in \mathbb{R}^n$, supposée ici inversible.

Remarque 36. On peut définir une densité gaussienne avec une matrice P définie positive mais pas symétrique. En effet, il suffit de remplacer P^{-1} par $Q^{-1} = 1/2 \left(P^{-1} + (P^{-1})^T \right)$: la matrice Q^{-1} est symétrique et engendre la même forme quadratique que P^{-1} .

1.3.2. Propriétés génériques

Une propriété étrange de la distribution gaussienne est que c'est la seule distribution qui possède un nombre fini de cumulants non nuls (C_1 et C_2). Sa fonction caractéristique est elle-même une exponentielle quadratique :

Propriété 37. La fonction caractéristique de la densité gaussienne de moyenne μ et de variance P a l'expression suivante :

$$\Phi_X(u) = e^{iu^T \mu - \frac{1}{2} u^T P u}$$

Preuve. Par définition de la fonction caractéristique :

$$\Phi_X(u) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |P|}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iu^T x} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T P^{-1}(x-\mu)} dx \quad (1.6)$$

Considérons le changement de variable $y = P^{-\frac{1}{2}}(x-\mu)$. On a alors $x = P^{\frac{1}{2}}y + \mu$ et $dx = |P|^{\frac{1}{2}}dy$. On obtient alors :

$$\Phi_X(u) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iu^T (P^{\frac{1}{2}}y + \mu) - \frac{1}{2}y^T y} dy$$

En écrivant l'argument de l'exponentielle comme une forme quadratique et en complétant le carré, on obtient :

$$\Phi_X(u) = e^{iu^T \mu} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}((y - iP^{\frac{1}{2}}u)^T (y - iP^{\frac{1}{2}}u) + u^T P u)} dy \quad (1.7)$$

$$= e^{iu^T \mu - \frac{1}{2} u^T P u} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(y - iP^{\frac{1}{2}}u)^T (y - iP^{\frac{1}{2}}u)} dy \quad (1.8)$$

$$= e^{iu^T \mu - \frac{1}{2} u^T P u} \quad (1.9)$$

le coefficient intégral étant la norme de la densité de probabilité gaussienne de moyenne $iP^{\frac{1}{2}}u$ et de variance unité. Cette norme est indépendante de u et unitaire. ■

La somme de deux formes quadratiques pouvant toujours s'écrire, après factorisation, comme une autre forme quadratique, on peut en déduire que le produit de densités gaussiennes donne une densité gaussienne. De plus, comme la fonction caractéristique d'une densité gaussienne est une exponentielle quadratique, on en déduit que la convolution (opération image de la multiplication par transformée de Fourier) de densités gaussiennes est également gaussienne. Ainsi, l'ensemble des densités de probabilité gaussienne est un ensemble de densités de probabilité fermé pour les opérations de multiplication et de convolution. Cela lui donne un rôle central dans la théorie des systèmes linéaires gaussiens comme il apparaîtra plus loin. Plus précisément, on a les théorèmes suivants.

Théorème 38. Toute transformation affine d'une variable aléatoire gaussienne est une variable aléatoire gaussienne.

Preuve. Soit X une variable aléatoire gaussienne de \mathbb{R}^n . Soit $Y = AX + B$ où A est une matrice de $\mathbb{R}^{p \times n}$, B un vecteur de \mathbb{R}^p et, par conséquent, Y une variable aléatoire de \mathbb{R}^p . Soit μ la moyenne de X et P sa matrice de covariance. La fonction caractéristique de Y est définie par :

$$\Phi_Y(u) = \mathbb{E}[e^{iu^T y}] \quad (1.10a)$$

$$= \mathbb{E}[e^{iu^T (Ax+B)}] \quad (1.10b)$$

$$= e^{iu^T B} \mathbb{E}[e^{iu^T Ax}] \quad (1.10c)$$

Or, par définition de la fonction caractéristique de X distribuée selon une loi gaussien, on a :

$$\mathbb{E}[e^{iu^T Ax}] = \mathbb{E}[e^{i(A^T u)^T x}] \quad (1.11a)$$

$$= \Phi_X(A^T u) \quad (1.11b)$$

En regroupant les équations 1.10c et 1.11b, on obtient :

$$\Phi_Y(u) = e^{iu^T(A\mu+B) - \frac{1}{2}u^T APA^T u}$$

qui est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire gaussienne de moyenne $A\mu + B$ et de variance APA^T . ■

Précisons à présent quelques propriétés relative à cette distribution qui seront utiles par la suite.

Théorème 39. *Si F est un matrice carrée inversible, $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a la relation suivante :*

$$\Gamma(x - Fy; P) = \frac{1}{|F|} \Gamma(y - F^{-1}x; F^{-1}PF^{-T}) \quad (1.12)$$

où F^{-T} désigne l'inverse de F^T .

Preuve. Par définition :

$$\Gamma(x - Fy; P) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |P|}} e^{-\frac{1}{2}(x-Fy)^T P^{-1}(x-Fy)} \quad (1.13)$$

En mettant F en facteur, ceci peut être récrit sous la forme suivante :

$$\Gamma(x - Fy; P) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |P|}} e^{-\frac{1}{2}(y-F^{-1}x)^T F^T P^{-1} F(y-F^{-1}x)} \quad (1.14)$$

Or :

$$e^{-\frac{1}{2}(y-F^{-1}x)^T F^T P^{-1} F(y-F^{-1}x)} = \frac{\sqrt{(2\pi)^n |P|}}{|F|} \Gamma(y - F^{-1}x; (F^T P^{-1} F)^{-1}) \quad (1.15)$$

d'où le résultat. ■

Théorème 40. *Le produit de densités gaussiennes est une densité gaussienne (non normalisée) :*

$$\Gamma(x - Fy; Q) \Gamma(y - \mu; P) = \Gamma(x - F\mu; A) \Gamma(y - \eta(x, \mu); B) \quad (1.16)$$

avec :

$$\eta(x, \mu) = \mu + PF^T(FPF^T + Q)^{-1}(x - F\mu) \quad (1.17a)$$

$$A = FPF^T + Q \quad (1.17b)$$

$$B = P - PF^T(FPF^T + Q)^{-1}FP \quad (1.17c)$$

$$= (F^T Q^{-1} F + P^{-1})^{-1} \quad (1.17d)$$

Voir annexe A.

Corollaire 41. *La convolution de deux densités gaussiennes est une densité gaussienne :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - Fy; Q) \Gamma(y - \mu; P) dy = \Gamma(x - F\mu; FPF^T + Q) \quad (1.18)$$

Preuve. C'est une application directe du théorème 40 où on a intégré sur la variable y . ■

Théorème 42. *Il existe toujours une transformation linéaire d'une variable aléatoire gaussienne X de \mathbb{R}^n en la variable Y de \mathbb{R}^n telle que les composantes de Y sont indépendantes entre-elles.*

Preuve. Une matrice de covariance étant définie positive et symétrique, il est toujours possible de la diagonaliser. Soit T la transformation orthogonale définie par l'ensemble des vecteurs propres de P et soit $Y = TX$ la nouvelle variable. D'après le théorème 31, la distribution de Y s'écrit :

$$p_Y(y) = \frac{1}{|T|} p_X(T^{-1}y) \quad (1.19)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |P|}} e^{-\frac{1}{2}(T^{-1}y - \mu)^T P^{-1}(T^{-1}y - \mu)} \quad (1.20)$$

la matrice orthogonale T étant unitaire, son déterminant est égal à l'unité. On peut donc récrire la densité de Y sous la forme suivante :

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |P|}} e^{-\frac{1}{2}(y - T\mu)^T T P^{-1} T^{-1}(y - T\mu)} \quad (1.21)$$

qui est une densité gaussienne de moyenne $T\mu$ et de covariance $Q = T P T^{-1}$, diagonale par construction. Par conséquent, si on note $\nu = T\mu$ et λ_i les valeurs propres de P , cette densité prend la forme suivante :

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \prod_{i=1}^n |\lambda_i|}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \nu_i)^2 / \lambda_i} \quad (1.22)$$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi |\lambda_i|}} e^{-\frac{1}{2} (y_i - \nu_i)^2 / \lambda_i} \quad (1.23)$$

$$= \prod_{i=1}^n \Gamma(y_i - \nu_i, \lambda_i) \quad (1.24)$$

qui est le produit de densités gaussiennes de moyennes ν_i et de variances λ_i . Comme la densité de $Y = [y_1, \dots, y_n]^T$ s'exprime comme le produit des densités $\Gamma(y_i - \nu_i, \lambda_i)$ de chacune de ses composantes, ces composantes sont indépendantes. ■

En d'autres termes, la forme quadratique argument de l'exponentielle définit un hyper-ellipsoïde et la base des vecteurs propres de P correspond aux axes principaux de ce hyper-ellipsoïde.

Que se passe-t-il si la matrice de covariance P est singulière ? En terme de valeurs propres, cela signifie que certaines sont nulles. Plus précisément, si n est la dimension de la matrice P de rang p , $n - p$ valeurs propres sont nulles. Or :

Théorème 43. *La limite d'une densité de probabilité gaussienne de \mathbb{R} dont la variance tend vers 0 est la mesure de Dirac ayant sa moyenne comme support.*

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Gamma(x - \mu; p) = \delta_\mu(x) \quad (1.25)$$

Preuve. Considérons la fonction caractéristique de la densité gaussienne calculée dans le théorème 35. Elle s'écrit :

$$\Phi_X^p(u) = e^{i\mu u - \frac{1}{2} p^2 u^2}$$

Il est clair que la limite quand p tend vers 0 donne :

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Phi_X^p(u) = e^{i\mu u}$$

qui n'est autre que la transformée de Fourier de la mesure de Dirac de support μ . ■

On dit que la densité de probabilité gaussienne est une unité approchée.

Théorème 44. *Si la matrice de covariance P d'une mesure de probabilité gaussienne est singulière, on peut représenter sa mesure de probabilité dans le repère de ses vecteurs propres sous la forme suivante :*

$$d\mathbb{P}_Y(y) = \prod_{i=1}^p \Gamma(y_i - \nu_i; \lambda_i) dy_i \prod_{i=p+1}^n d\delta_{\nu_i}(y_i) \quad (1.26)$$

Preuve. En utilisant le théorème 42, on peut représenter la mesure de probabilité dans l'espace des vecteurs propres de P . Or, si celle-ci est singulière, certaines des valeurs propres associées sont nulles. L'application du théorème 43 permet alors d'obtenir le résultat annoncé. ■

En termes de mesures, la distribution gaussienne est donc toujours définie, quelque soit le rang de la matrice de covariance.

1.3.3. Moments centrés

Les moments centrés d'une variable aléatoire X de moyenne μ sont définis comme les quantités $M_n = \mathbb{E}[(x - \mu)^n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 45. *Les moments centrés d'une variable gaussienne X scalaire de moyenne μ et de variance P sont égaux à :*

$$\begin{aligned} M_{2n} &= \frac{(2n)!}{n!2^n} P^n \\ M_{2n+1} &= 0 \end{aligned}$$

Preuve. Il suffit de développer en série la fonction caractéristique de $X - \mu$:

$$\begin{aligned} \Phi_{X-\mu}(u) &= e^{-\frac{1}{2}u^2 P} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}u^2 P\right)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} P^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n u^{2n} \end{aligned}$$

et d'identifier M_n comme étant le coefficient de $(iu)^n/n!$ dans la série. A noter que M_{2n} peut se récrire comme :

$$M_{2n} = 1 \times 3 \times 5 \dots \times (n-1) \times P^n$$

■

1.4. Théorèmes limites

Il est fondamental en pratique de pouvoir comparer les résultats d'une expérimentation avec ce qu'on pouvait en attendre du fait d'une modélisation d'un phénomène par une variable aléatoire. Cette analyse peut être réalisée en utilisant la loi des grands nombres qui montre que quand le nombre de tirages (d'expériences) réalisés sur une variable aléatoire tend vers l'infini, on peut retrouver les propriétés statistiques de cette variable.

1.4.1. Loi des grands nombres

La loi des grands nombres permet de mettre en relation les moyennes expérimentales obtenues à partir de réalisations d'une variable aléatoire avec la véritable moyenne, au sens de l'espérance mathématique, de celle-ci. Elle a de ce fait un énorme intérêt pratique dans la mesure où, pour une variable aléatoire réelle, c'est généralement le seul moyen dont on dispose pour quantifier ses propriétés statistiques.

Théorème 46. (*Loi des grands nombres*) Soit $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables indépendantes de variances finies et de même loi qu'une variable aléatoire X de moyenne μ , alors :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu$$

en moyenne quadratique.

Preuve. Evaluons la moyenne de l'erreur quadratique $\mathbb{E}[(X - \overline{X}_n)^2]$ en séparant les carrés des produits croisés :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X - \overline{X}_n)^2] &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X - X_i)^2] + \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1 \atop i \neq j}^n \mathbb{E}[(X - X_i)(X - X_j)] \end{aligned}$$

Les variables X_i et X_j étant indépendantes, on a :

$$\forall i \neq j, \mathbb{E}[(X - X_i)(X - X_j)] = \mathbb{E}[(X - X_i)]\mathbb{E}[(X - X_j)] = 0$$

les variables ayant même distribution de moyenne μ . En revanche, pour $i = j$, on a :

$$\mathbb{E}[(X - X_i)^2] = \sigma^2$$

où σ^2 désigne la variance de X . Par conséquent, l'erreur quadratique s'écrit :

$$\mathbb{E}[(X - \overline{X}_n)^2] = \frac{\sigma^2}{n}$$

qui tend bien vers zéro quand n tend vers l'infini. ■

1.4.2. Théorème central-limite

Ainsi, on constate que la moyenne expérimentale converge vers la vraie moyenne quand le nombre de réalisations tend vers l'infini. Cependant, à ce stade, on ignore comment se distribue la moyenne expérimentale en fonction du nombre de tirages réalisés. C'est le théorème central-limite qui fournit la réponse. En effet, celui-ci permet de conclure que la somme de variables aléatoires indépendantes et de même loi converge vers une loi gaussienne.

Théorème 47. (*Théorème central-limite*) Soit $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables indépendantes à variance bornée et de même loi qu'une variable aléatoire X de moyenne μ et de variance σ^2 . La distribution de la suite de variables aléatoires Y_i définie par :

$$Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)$$

tend vers une distribution gaussienne de moyenne nulle et de variance unité : $\Gamma(y, 1)$.

Preuve. Exprimons la fonction caractéristique de la variable aléatoire Y_n . Soit $\tilde{X}_i = (X_i - \mu)$ et soit $\Phi_X(u)$ la fonction caractéristique de \tilde{X}_i , indépendante de i , par hypothèse :

$$\Phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iux}]$$

Un simple changement de variable donne :

$$\begin{aligned}\Phi_{\frac{\tilde{X}}{\sigma\sqrt{n}}}(u) &= \mathbb{E}[e^{iu\frac{\tilde{x}}{\sigma\sqrt{n}}}] \\ &= \Phi_{\tilde{X}}\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

Comme il a été souligné dans l'exemple 32, la fonction caractéristique de la somme de variables aléatoires indépendantes est égale au produit des fonctions caractéristiques de chaque variable. On a alors :

$$\Phi_{Y_n}(u) = \left(\Phi_{\tilde{X}}\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n \quad (1.27)$$

Développons la fonction caractéristique de en ses cumulants, conformément à la formule 1.2. La moyenne de \tilde{X}_i étant nulle, on obtient :

$$\log(\Phi_{\tilde{X}}(u)) = \frac{1}{2}\sigma^2(iu)^2 + \sum_{k \geq 3} \frac{C_k}{k!}(iu)^k$$

On reportant cette expression dans 1.27, on obtient :

$$\begin{aligned}\Phi_{Y_n}(u) &= e^{n(\frac{1}{2}\sigma^2(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})^2 + \sum_{k \geq 3} \frac{C_k}{k!}(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})^k)} \\ &= e^{(iu)^2} e^{\sum_{k \geq 3} \frac{C_k}{k!}(iu)^k n^{k-(k/2)}}\end{aligned}$$

Toutes les puissances de n dans la série pour $k \geq 3$ étant négatives, la limite quand n tend vers l'infini de cette série est nulle, ce qui montre que la fonction caractéristique de Y_n tend vers la fonction caractéristique d'une variable gaussienne de variance unité. ■

Ce théorème est très important car il permet de quantifier l'erreur commise en réalisant une moyenne expérimentale en fonction du nombre de réalisations utilisé. En effet, si on exprime la moyenne expérimentale \overline{X}_n en fonction de la variable Y_n , on obtient :

$$\overline{X}_n = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Y_n$$

Cela signifie que \overline{X}_n est asymptotiquement distribuée selon une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2/n . On traduit ceci en disant que la moyenne expérimentale "tend en $1/\sqrt{n}$ vers la vraie moyenne".

2. PROCESSUS STOCHASTIQUES MARKOVIENS

La notion de processus stochastique est centrale dans la modélisation des systèmes dynamiques physiques pour lesquels une modélisation déterministe est impossible. En effet, certaines variables inconnues ou perturbations (non mesurées) peuvent influencer le comportement dynamique d'un système. Ces perturbations peuvent être le résultat de phénomènes physiques aléatoires (le bruit électronique, le rayonnement électromagnétique,...) ou bien du fait de la non connaissance de certaines variables qui gouvernent l'évolution du système (les aléas de pilotage d'un avion observé depuis le sol, des entrées non mesurées, l'apparition d'une panne,...). L'objectif poursuivi est alors d'exploiter au mieux la connaissance que nous avons du comportement dynamique du système à travers la modélisation du phénomène (lois de la mécanique, lois de l'électromagnétisme, lois de la cinétique chimique,...) et de rejeter l'aspect aléatoire dans la représentation de quantité "purement imprévisibles", c'est à dire dont la connaissance du passé n'informe en rien sur son devenir. Pour reprendre l'exemple d'un avion observé du sol, les instants de décision de commande de pilotage ainsi que les amplitudes de ces commandes sont en général totalement imprévisibles. En revanche, la trajectoire empruntée par l'avion excitée par ces commandes relève des lois de la mécanique newtonienne et serait calculable, si les commandes étaient connues. On parle d'ailleurs parfois de systèmes pour lesquels l'entrée est inconnue. Les processus que nous avons qualifiés de "purement imprévisible" sont appelés des "bruits blancs", à cause en particulier de leurs propriétés spectrales (semblable à la lumière blanche où toutes les composantes ont la même densité). Il faut remarquer qu'une quantité est qualifiée de "bruit" ou "perturbation" selon le contexte d'observation. En effet, pour un observateur qui n'est pas en communication radio avec le pilote d'un avion, les commandes de pilotage sont considérées comme des bruits alors que pour le pilote elle ne le sont évidemment pas.

2.1. Définition et classification des processus stochastiques

2.1.1. Processus stochastiques

Un processus stochastique peut se résumer à une variable aléatoire à valeurs dans un espace E paramétrée par un ensemble ordonné d'indice T . En particulier, pour représenter l'évolution temporelle de l'état aléatoire d'un système dynamique, on considère celui-ci comme une variable aléatoire qui est, à chaque instant t , définie sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) . Si E désigne l'espace de réalisation de l'état du système, un processus stochastique est une application de Ω dans E qui, au couple (ω, t) associe la variable $X_t(\omega)$. Autrement dit, pour chaque instant t , l'application $\omega \rightarrow X_t(\omega)$ est une variable aléatoire alors que pour ω fixé, l'application $t \rightarrow X_t(\omega)$ est une trajectoire particulière du système. Cette notion permet d'introduire le concept d'évolution aléatoire d'un système dynamique. De manière générale, on définit les processus stochastiques comme suit.

Définition 48. *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $\{X_t, t \in T\}$ définies sur le même espace probabilisé E où T est une famille d'indices ordonnés.*

Nous nous limiterons dans la suite aux processus stochastiques mono-dimensionnels, c'est à dire dans le cas où $T = \mathbb{R}$ ou \mathbb{N} . L'espace d'indice correspond alors à la notion de temps.

Selon la nature des espaces T et E , on peut envisager une classification des processus suivant le tableau 2.1.1 :

	$E = \mathbb{R}$ ou \mathbb{R}^n	$E = \mathbb{N}$
$T = \mathbb{R}$	<ul style="list-style-type: none"> - processus physiques aléatoires - bruit électronique - position d'un mobile non-coopératif 	<ul style="list-style-type: none"> - signaux de télécommunication - changements d'hypothèses - apparitions de pannes
$T = \mathbb{N}$	<ul style="list-style-type: none"> - processus échantillonnés - processus à sauts fixes dans le temps - ... 	<ul style="list-style-type: none"> - signaux de télécommunication échantillonnés - signaux continus échantillonnés et quantifiés - ...

TAB. 2.1 – Classification des processus stochastiques

A noter qu'un système dynamique peut comporter à la fois des processus continus décrivant, par exemple, des quantités physiques, et des processus discrets destinés à représenter, par exemple, un état de fonctionnement du système. On parle alors de processus hybrides.

La loi d'un processus stochastique se définit par la loi conjointe des valeurs que peut prendre le processus sur une suite d'instantanés de T , chacune des variables aléatoires ayant comme source le même espace de probabilité.

Définition 49. La loi d'un processus stochastique $\{X_t, t \in T\}$ défini sur l'espace E est définie par la probabilité conjointe de ce processus sur toute suite d'indices de T , soit :

$$\{\mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1 \wedge \dots \wedge X_{t_n} \in A_n), \forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(E), \forall t_1, \dots, t_n \in T, t_1 < \dots < t_n\}$$

Pour $E = \mathbb{R}$ ou \mathbb{R}^n , cette loi est définie par :

$$\mathbb{P}_{X_{t_1} \dots X_{t_n}}(dx_{t_1}, \dots, dx_{t_n})$$

Dans le cas où les probabilités sont des mesures à densités, il suffit de définir la famille de densités de probabilité de toute trajectoire selon :

Corollaire 50. Si la loi du processus stochastique $\{X_t, t \in T\}$ est une mesure à densité, celui-ci est défini par l'ensemble de densités de probabilité suivant :

$$\{p_{X_{t_1} \dots X_{t_n}}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}), \forall x_{t_1}, \dots, x_{t_n} \in E, \forall t_1, \dots, t_n \in T, t_1 < \dots < t_n\}$$

Une classe importante de processus est celle des processus stationnaires dont les caractéristiques ne dépendent pas explicitement de l'origine utilisée pour la variable temporelle t

Définition 51. Un processus X_t est stationnaire si :

$$\forall \{t_1 < \dots < t_n\} \in T, \forall t \in T, \mathbb{P}_{X_{t_1} \dots X_{t_n}}(dx_{t_1}, \dots, dx_{t_n}) = \mathbb{P}_{X_{t_1+t} \dots X_{t_n+t}}(dx_{t_1}, \dots, dx_{t_n})$$

Comme pour une variable aléatoire, il est possible de définir un processus stochastique à partir de l'ensemble de ses moments.

Corollaire 52. La loi du processus stochastique $\{X_t, t \in T\}$ est définie par l'ensemble de ses moments, soit :

$$\left\{ \mathbb{E}[(x_{t_1})^{k_1} \dots (x_{t_n})^{k_n}], \forall x_{t_1}, \dots, x_{t_n} \in E, \forall t_1, \dots, t_n \in T, t_1 < \dots < t_n, \forall k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \right\}$$

Parmi l'ensemble des moments, on utilise communément, dans la théorie des systèmes linéaires gaussiens, la moyenne du processus $\mathbb{E}[x_t]$ ainsi que son autocorrélation $\mathbb{E}[x_t x_s]$.

La classe des processus markoviens est une sous-classe de processus stochastique à mémoire finie. De même que pour les systèmes dynamiques déterministes, l'état d'un processus markovien continu sera généralement représenté par un vecteur de \mathbb{R}^n destiné à résumer tout le passé du processus. La définition de cet état dynamique et de la forme de son évolution est souvent le fruit de la modélisation du système à partir de la description du phénomène physique duquel il ressort. Ils peuvent être vus comme l'équivalent stochastique des systèmes dynamiques causaux réalisables en dimension finie dont l'évolution ne dépend que de leur état présent et non de leur futur, ni de leur passé. Il peut aussi être issu d'un procédé d'identification qui s'attache à faire "coller" au mieux un modèle généralement paramétrique aux vues des données de trajectoires d'entrées/sorties relevées expérimentalement sur le système.

2.1.2. Processus markoviens

La classe des processus markoviens est une sous-classe de processus stochastique à mémoire finie. De même que pour les systèmes dynamiques déterministes, l'état d'un processus markovien continu sera généralement représenté par un vecteur de \mathbb{R}^n destiné à résumer tout le passé du processus. La définition de cet état dynamique et de la forme de son évolution est souvent le fruit de la modélisation du système à partir de la description du phénomène physique duquel il ressort. Ils peuvent être vus comme l'équivalent stochastique des systèmes dynamiques causaux réalisables en dimension finie dont l'évolution ne dépend que de leur état présent et non de leur futur, ni de leur passé. Il peut aussi être issu d'un procédé d'identification qui s'attache à faire "coller" au mieux un modèle généralement paramétrique aux vues des données de trajectoires d'entrées/sorties relevées expérimentalement sur le système. Les processus markoviens se définissent de manière générale comme des processus à mémoire finie.

Définition 53. *Un processus $X_t \in E$ est markovien si :*

$$\forall t_1, \dots, t_n \in T \text{ / } t_1 < \dots < t_n, \forall A \in \mathcal{T}(E), \forall x_{t_1}, \dots, x_{t_{n-1}} \in E,$$

$$\mathbb{P}(X_{t_n} \in A | X_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_1} = x_{t_1}) = \mathbb{P}(X_{t_n} \in A | X_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}})$$

Pour $E = \mathbb{R}$ ou \mathbb{R}^n , on peut écrire cette égalité sur tout intervalle de largeur infinitésimale dx_{t_n} selon :

$$\mathbb{P}_{X_{t_n}|X_{t_{n-1}} \dots X_{t_1}}(dx_{t_n} | x_{t_{n-1}}, \dots, x_{t_1}) = \mathbb{P}_{X_{t_n}|X_{t_{n-1}}}(dx_{t_n} | x_{t_{n-1}})$$

Pour $T = \mathbb{R}$ ou \mathbb{N} , cette propriété peut s'énoncer de la manière suivante :

$$\forall t > s \in T, \forall A \in \mathcal{T}(E), \mathbb{P}(X_t \in A | \{X_\tau = x_\tau, \tau \leq s\}) = \mathbb{P}(X_t \in A | X_s = x_s)$$

Enfin, si la mesure de probabilité du processus est à densité, cette propriété markovienne se traduit par :

$$\forall t_1 < \dots < t_n \in T, p_{X_{t_n}|X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_1}}(x_{t_n} | x_{t_{n-1}}, \dots, x_{t_1}) = p_{X_{t_n}|X_{t_{n-1}}}(x_{t_n} | x_{t_{n-1}})$$

Une conséquence directe de la définition est qu'un processus markovien est totalement spécifié par la donnée de sa probabilité de transition $\mathbb{P}_{X_t|X_s}(dx_t|x_s), \forall \tau < t$ et de sa probabilité initiale $\mathbb{P}_{X_{t_1}}(dx_{t_1})$. En effet, comme il a été souligné plus haut, pour spécifier un processus stochastique, il suffit de définir l'ensemble des mesures de probabilité $\mathbb{P}_{X_{t_1} \dots X_{t_n}}(dx_{t_1}, \dots, dx_{t_n})$. En utilisant la définition de la probabilité conditionnelle, on peut écrire :

$$\mathbb{P}_{X_{t_1} \dots X_{t_n}}(dx_{t_1}, \dots, dx_{t_n}) = \mathbb{P}_{X_{t_n}|X_{t_{n-1}} \dots X_{t_1}}(dx_{t_n} | x_{t_{n-1}}, \dots, x_{t_1}) \mathbb{P}_{X_{t_1} \dots X_{t_{n-1}}}(dx_{t_1}, \dots, dx_{t_{n-1}})$$

et en utilisant la propriété markovienne, on obtient :

$$\mathbb{P}_{X_{t_1} \dots X_{t_n}}(dx_{t_1}, \dots, dx_{t_n}) = \mathbb{P}_{X_{t_n}|X_{t_{n-1}}}(dx_{t_n}|x_{t_{n-1}}) \mathbb{P}_{X_{t_1} \dots X_{t_{n-1}}}(dx_{t_1}, \dots, dx_{t_{n-1}})$$

qui se transforme par récurrence en :

$$\mathbb{P}_{X_{t_1} \dots X_{t_n}}(dx_{t_1}, \dots, dx_{t_n}) = \mathbb{P}_{X_{t_n}|X_{t_{n-1}}}(dx_{t_n}|x_{t_{n-1}}) \dots \mathbb{P}_{X_{t_2}|X_{t_1}}(dx_{t_2}|x_{t_1}) \mathbb{P}(dx_{t_1})$$

La version densité de probabilité s'écrit :

$$p_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = p_{X_{t_n}|X_{t_{n-1}}}(x_{t_n}|x_{t_{n-1}}) \dots p_{X_{t_2}|X_{t_1}}(x_{t_2}|x_{t_1}) p_{X_{t_1}}(x_{t_1})$$

L'équation fondamentale, dite équation de Chapman-Kolmogorov, permet de décrire l'évolution temporelle de la distribution de probabilité des processus markoviens à partir de leur probabilité de transition.

Théorème 54. *La mesure de probabilité $\mathbb{P}_{X_t}(x_t)$ d'un processus markovien $X_t \in E$ ayant $\mathbb{P}_{X_t|X_s}(dx_t|x_s)$ comme densité de probabilité de transition évolue selon la formule suivante :*

$$\mathbb{P}_{X_t}(dx_t) = \int_E \mathbb{P}_{X_t|X_s}(dx_t|x_s) \mathbb{P}_{X_s}(dx_s), \forall s < t$$

où la sommation a lieu sur x_s .

Preuve. Il suffit de considérer la mesure de probabilité $\mathbb{P}_{X_t}(dx_t)$ comme la marginale de $\mathbb{P}_{X_t, X_s}(dx_t, dx_s)$, $s < t$ de la manière suivante :

$$\mathbb{P}_{X_t}(dx_t) = \int_E \mathbb{P}_{X_t, X_s}(dx_t, dx_s)$$

en sommant sur x_s . On obtient alors le résultat en utilisant la définition de la probabilité conditionnelle. ■

A noter que ce théorème, très général, s'étend évidemment aux espaces discrets ($E = \mathbb{N}$) où l'intégrale est remplacée par une somme discrète.

Un moyen courant utilisé pour construire un processus markovien est de considérer des modèles dynamique dont les entrées sont des bruits blancs. Par exemple, si on se restreint au temps discret ; l'état x_t d'un système dynamique défini sur \mathbb{R}^n par l'équation aux différences suivante :

$$x_t = f(t, x_{t-1}, w_t)$$

où w_t est un processus aléatoire "sans mémoire", c'est à dire tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}_{W_t|W_{t-1} \dots W_0}(dw_t|w_{t-1}, \dots, w_0) = \mathbb{P}_{W_t}(dw_t)$$

est un processus markovien. Un tel processus (w_t) est appelé "bruit blanc". Cette construction étant la base de la modélisation des systèmes dynamiques stochastiques, il est important de préciser le concept général de bruit blanc et en particulier de le définir dans le cadre physique du temps continu. C'est l'objet de la section suivante.

2.2. Bruits blancs

Dans la phase de modélisation d'un processus physique partiellement aléatoire, comme il a été souligné plus haut, l'objectif est de remonter jusqu'à l'aléa élémentaire purement imprévisible qui engendre les trajectoires du processus. On pourra alors considérer que toute la connaissance qu'on a du système aura été épuisée puisque les seules variables qui le gouvernent sont "totalement" aléatoire, dépourvus de toute mémoire. L'idée générale qui sous-tend la notion de bruit blanc est donc celle d'un processus de moyenne nulle¹ dont les réalisations sont à chaque instant indépendantes de son propre passé. En d'autres termes, la connaissance du passé du processus ne renseigne en rien sur la réalisation future de celui-ci. A noter que le terme "bruit blanc" est utilisé généralement pour des processus simplement décorrélés. Nous l'étendons ici à la notion d'indépendance.

Dans le contexte du temps discret (ou échantillonné), cette notion est aisée à définir car repose uniquement sur la notion d'indépendance :

Définition 55. *Un processus X_t à temps discret, $t \in \mathbb{N}$, est un bruit blanc si $\forall t \neq s \in \mathbb{N}$, X_t est indépendant de X_s .*

Dans ce cadre, il est possible d'imaginer toutes sortes de bruits blancs selon la distribution qu'on leur attribue. En revanche, pour le temps continu, la notion d'indépendance dans le temps est plus délicate à imaginer. Pour introduire la notion de bruit blanc à temps continu, on s'appuie sur la notion de processus à accroissements indépendants (PAI), plus facile à définir. Les bruits blancs en seront la dérivée (formelle) par rapport au temps.

Définition 56. *Un processus X_t est à accroissements indépendants (PAI) si $\forall \{t_1 < \dots < t_n\} \in T$, les variables aléatoires $X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.*

Définition 57. *Si la loi de la variable $X_{t+s} - X_t$ est indépendante de t , le PAI X_t est appelé processus à accroissements indépendants stationnaire (PAIS).*

Curieusement, le fait d'imposer uniquement cette contrainte d'indépendance des accroissements conduit à seulement deux types de processus. Si on impose comme contrainte supplémentaire que les trajectoires du processus soient continues, il ne reste dans la classe de tous les processus à accroissements indépendants que le mouvement brownien. Si alors on relaxe cette contrainte en excluant le mouvement brownien, on obtient alors les processus à sauts. Les accroissements de ces processus à sauts sont nuls presque toujours, sauf pour un nombre fini (dénombrable) de points supports, dits instants de saut. Ces instants de sauts sont alors régis par un processus de comptage (Poisson).

Pour ce convaincre de ceci, il suffit de tenter de construire un PAI comme limite d'un processus à temps discret. Considérons un intervalle de temps $[0, t]$ découpé en n intervalles de largeur Δt , donc tel que $t = n\Delta t$. Considérons alors un bruit blanc $X_k^n, k \in \mathbb{N}$ à temps discret conforme à la définition 56 défini sur les points support de l'intervalle discrétisé. Soit $p_X^n(x)$ la densité de probabilité stationnaire de X_k^n . Construisons alors le processus Y_k^n à temps discret obtenu par sommation des réalisations de X_k^n sur l'intervalle de temps $[0, t]$:

$$Y_k^n = \sum_{i=1}^k X_i^n$$

¹Si le processus n'est pas de moyenne nulle, il suffit d'en soustraire sa moyenne pour obtenir un processus qui satisfasse cette hypothèse.

Par définition, Y_k^n est clairement à accroissements indépendants. Que se passe-t-il si on fait tendre n vers l'infini, c'est à dire quand $\Delta t \rightarrow 0$? Pour que le processus Y_k^n ne soit pas dégénéré, il est nécessaire, en particulier, que sa variance ne soit ni nulle ni infinie. Pour satisfaire cette contrainte, seules deux alternatives s'offrent à nous. Soit on somme une infinités d'accroissements dont la variance de chacun tend vers 0 quand $\Delta t \rightarrow 0$, soit on somme un nombre fini d'accroissements non nuls de variance qui conservent une valeur finie non infinitésimale quand $\Delta t \rightarrow 0$. Dans le premier cas, cette construction donne lieu au mouvement brownien (trajectoires continues) et dans le second, elle donne lieu aux processus à sauts (trajectoires discontinues).

2.2.1. Processus continu à accroissements indépendants : le mouvement brownien

Examinons le premier des cas cités précédemment et analysons le processus obtenu quand on somme une infinité d'accroissements aléatoires qui tendent vers 0. Considérons donc le bruit blanc à temps discret $\Delta B_k^n, k \in \mathbb{N}$ d'écart type σ^n qui tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Le processus à accroissements indépendants B_k^n obtenu en sommant le bruit blanc ΔB_k^n s'écrit :

$$B_k^n = \sum_{i=1}^k \Delta B_i^n$$

Calculons la variance de ce processus :

$$\mathbb{E} [(B_k^n)^2] = \sum_{i_1=1}^k \sum_{i_2=1}^k \mathbb{E} [\Delta B_{i_1}^n \Delta B_{i_2}^n]$$

Les réalisations de ΔB_i^n étant indépendantes et de moyenne nulle, tous les produits croisés donnent zéro ; seuls les termes quadratiques de cette somme sont non nuls. Ainsi :

$$\mathbb{E} [(B_k^n)^2] = \sum_{i=1}^k \mathbb{E} [(\Delta B_i^n)^2] \quad (2.1a)$$

$$= k (\sigma^n)^2 \quad (2.1b)$$

par définition. Soit $\beta_t \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} B_n^n$ le processus obtenu à la limite. On peut calculer sa variance selon :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(\beta_t)^2] &= \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sigma^n)^2 \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} t \frac{(\sigma^n)^2}{\Delta t} \end{aligned}$$

par définition du nombre $n = t/\Delta t$ de points de discrétisation. Pour que cette variance ne soit pas dégénérée quand $n \rightarrow \infty$, celle-ci doit prendre une valeur finie. Il est donc nécessaire que σ^n tende vers 0 en assurant que :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\sigma^n)^2}{\Delta t} = Q$$

garde une valeur finie, ici fixée à la valeur Q . A la limite, cela signifie que les accroissements infinitésimaux $d\beta_t$ du processus β_t doivent être tels que :

$$\mathbb{E} [(d\beta_t)^2] = Q dt$$

Cela peut s'exprimer en disant que les accroissements du processus β_t sont "proportionnels à \sqrt{dt} ".

De plus, en vertu du théorème 47 (théorème centrale limite), la distribution de β_t est gaussienne de variance Qt . En effet, il suffit d'appliquer le théorème 47 avec $\sigma = \sqrt{Q\Delta t}$.

Par ailleurs, les accroissements $(\Delta B_k^n)^2$ étant de l'ordre Δt , on peut en déduire que $(\Delta B_k^n)^4$ est de l'ordre de $(\Delta t)^2$ et sont donc négligeables par rapport $(\Delta B_k^n)^2$:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta B_k^n)^4}{(\Delta B_k^n)^2} = 0$$

Il en résulte que la variable aléatoire $(\Delta B_k^n)^2$ à elle même une variance qui tend vers 0 ce qui en fait une variable déterministe égale à sa moyenne : $(d\beta_t)^2 = Qdt$.

Il est possible de généraliser définition du processus que nous venons de décrire au cas non stationnaire, c'est à dire au cas où la variance σ_k^n de ΔB_k^n dépend de k . L'équation 2.1a s'écrit alors :

$$\mathbb{E}[(B_k^n)^2] = \sum_{i=1}^k (\sigma_i^n)^2$$

Comme précédemment, pour que cette somme soit finie, il est nécessaire que :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\sigma_k^n)^2}{\Delta t} = Q_k, \forall k = 1 \dots n$$

et la variance du processus limite s'obtient comme l'intégrale :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\beta_t)^2] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n Q_k \Delta t \\ &= \int_0^t Q_\tau d\tau \end{aligned}$$

Comme précédemment, pour que cette somme soit finie, il est nécessaire que :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\sigma_k^n)^2}{\Delta t} = Q_k, \forall k = 1 \dots n$$

et la variance du processus limite s'obtient comme l'intégrale :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\beta_t)^2] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n Q_k \Delta t \\ &= \int_0^t Q_\tau d\tau \end{aligned}$$

Le processus β_t ainsi construit se nomme le mouvement brownien. Il caractérise le mouvement erratique d'une particule d'un gaz qui se choque aux autres particules du milieu. La trajectoire résultante est naturellement continue mais extrêmement perturbée du fait du nombre de chocs très important que subit celle-ci à chaque instant. A l'échelle macroscopique, la trajectoire sera continue mais presque partout non dérivable. Comme il a été annoncé plus haut, ce processus décrit tous les PAI à trajectoires continues :

Définition 58. *Un mouvement brownien est un processus β_t réel à temps continu tel que $\beta_0 = 0$ et à accroissements $d\beta_t$ indépendants dont les trajectoires sont continues :*

$$\beta_t = \int_0^t d\beta_t \quad (2.2)$$

En résumé, le mouvement brownien possède les propriétés suivante :

Propriété 59. β_t est normalement distribué.

Propriété 60. $\mathbb{E}[(\beta_t - \beta_s)^2] = \int_s^t Q_\tau d\tau, \forall t > s$

Propriété 61. $\mathbb{E}[d\beta_t] = 0$

Propriété 62. $(d\beta_t)^2 = Q_t dt$

Propriété 63. $(d\beta_t)^k = 0, \forall k \geq 3 \in \mathbb{N}$

Un exemple de réalisation d'un tel processus est représenté figure 2.1. On a représenté en pointillé sur cette figure plus ou moins l'écart type du processus, proportionnel à \sqrt{t} .



FIG. 2.1 – Exemple de trajectoire d'un mouvement brownien

2.2.2. Processus discontinus à accroissements indépendants

La seconde alternative évoquée pour construire un processus à accroissements indépendant non dégénéré est de considérer la somme finie d'accroissements non infinitésimaux. Cela implique que tous les autres accroissements, en nombre infini, doivent être nuls. Par conséquent, si on note $\Delta\pi_k^n$ un bruit blanc à temps discret défini sur l'intervalle $[0, t]$ découpé en n sous-intervalles de largeur Δt , on peut construire le processus somme P_k^n comme suit :

$$P_k^n = \sum_{i=1}^k \Delta\pi_i^n \quad (2.3)$$

où, à la limite quand $\Delta t \rightarrow 0$, le nombre d'accroissements non nul reste fini. Le processus à accroissements indépendants qui gère les points supports des incréments non nuls s'appelle un processus de comptage.

Processus de comptage

Un processus de comptage se définit comme un processus à accroissements indépendants à valeurs entières dont les accroissements prennent la valeur 0 ou 1. Considérons un tel processus à temps discret N_k^n défini sur l'intervalle $[0, t]$ découpés en n sous-intervalles de largeur Δt . A chaque instant, les accroissements ΔN_k^n de ce processus sont des tirages indépendants égaux à 0 ou 1. Ils suivent donc une loi binomiale. Soient $p^0 \triangleq \mathbb{P}[\Delta N_k^n = 0]$ et $p^1 \triangleq \mathbb{P}[\Delta N_k^n = 1]$ avec $p^0 + p^1 = 1$. La moyenne de ces accroissements est donc égale à :

$$\mathbb{E}[\Delta N_k^n] = 0 \times p^0 + 1 \times p^1 = p^1$$

Par définition :

$$N_k^n = \sum_{i=1}^k \Delta N_i^n$$

et la valeur moyenne de ce processus pour $k = n$ est égale à :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_n^n] &= np^1 \\ &= t \frac{p^1}{\Delta t} \end{aligned}$$

Si on souhaite que le processus ne soit pas dégénéré, il est nécessaire qu'à la limite quand $\Delta t \rightarrow 0$, $\mathbb{E}[N_n^n]$, le nombre moyen de sauts unitaires du processus, soit fini. Cela impose que, quelque soit n (ou Δt), on ai :

$$\frac{p^1}{\Delta t} = \lambda$$

pour une certaine valeur de λ indépendante de n . Cette quantité s'appelle la fréquence (de sauts) du processus. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Delta N_k^n = 1) &= \lambda \Delta t \\ \mathbb{P}(\Delta N_k^n = 0) &= 1 - \lambda \Delta t \end{aligned}$$

Cherchons à présent la distribution de probabilité de N_n^n quand $n \rightarrow \infty$. Il suffit pour ce faire d'examiner l'ensembles des probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(N_n^n = m), \forall m = 0 \dots n$$

En effet, après n incréments, le processus peut au plus être égal à n (situation extrême correspondant $\Delta N_k^n = 1, \forall k = 1 \dots n$). Pour que $N_n^n = m$, il est nécessaire que, sur les n points d'échantillonnage, $\Delta N_k^n = 1$ m fois et que $\Delta N_k^n = 0$ les $n - m$ fois restantes. Cet événement à la probabilité $(\lambda \Delta t)^m (1 - \lambda \Delta t)^{n-m}$. De plus, toute combinaison de m sauts répartis sur les n échantillons donne le même résultat final. Le nombre de ces combinaisons est égal à $C_n^m = n! / (m!(n - m)!)$. Par conséquent, la probabilité recherchée est donnée par :

$$\mathbb{P}(N_n^n = m) = C_n^m (\lambda \Delta t)^m (1 - \lambda \Delta t)^{n-m}$$

En reprenant l'expression de $\Delta t = t/n$, on obtient :

$$\mathbb{P}(N_n^n = m) = C_n^m \left(\frac{\lambda t}{n} \right)^m \left(1 - \frac{\lambda t}{n} \right)^{n-m}$$

Quand n tend vers l'infini, le nombre de combinaisons est équivalent à :

$$C_n^m = \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{m!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^m}{m!}$$

De plus, à l'infini, on a :

$$\log \left(\left(1 - \frac{\lambda t}{n} \right)^{n-m} \right) = (n-m) \log \left(1 - \frac{\lambda t}{n} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \left(-\frac{\lambda t}{n} \right) = -\lambda t$$

Le processus N_t obtenu quand $n \rightarrow \infty$ suit une loi de Poisson $\lim_{n \rightarrow \infty} P(N_n^n = m) = \frac{1}{m!} (\lambda t)^m e^{-\lambda t}$:

Définition 64. *Un processus de comptage N_t (Poisson) de fréquence λ est un processus à valeurs entières tel que $N_0 = 0$, et que $\forall m \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbb{P}(N_t = m) = \frac{1}{m!} (\lambda t)^m e^{-\lambda t} \quad (2.4)$$

Comme pour le cas brownien, il est possible d'étendre cette définition au cas non stationnaire, c'est à dire au cas où la fréquence λ dépend du temps. Notons $p_k^1 \triangleq \mathbb{P}[N_k^n = 1]$ L'espérance de N_k^n a alors l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_n^n] &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(N_k^n = 1) \\ &= \sum_{k=1}^n p_k^1 \end{aligned}$$

Pour que cette expression garde un sens non dégénéré quand $n \rightarrow \infty$, il est nécessaire que, quelque soit n :

$$\frac{p^1}{\Delta t} = \lambda_k$$

et, par passage à la limite quand $n \rightarrow \infty$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_t] &= \int_0^t \lambda_\tau d\tau \\ \mathbb{P}(N_t = m) &= \frac{1}{m!} \left(\int_0^t \lambda_\tau d\tau \right)^m e^{-\int_0^t \lambda_\tau d\tau} \end{aligned}$$

En résumé, le processus de comptage N_t possède les propriétés suivantes :

Propriété 65. N_t est distribué selon une loi de Poisson.

Propriété 66. $\mathbb{E}[N_t - N_s] = \int_s^t \lambda_\tau d\tau$

Propriété 67. $\mathbb{E}[dN_t] = \lambda_t dt$

Propriété 68. $\mathbb{E}[(dN_t)^k] = \lambda_t dt, \forall k \geq 1$

Propriété 69. $\mathbb{P}(dN_t = 1) = \lambda_t dt$ (formellement)

La propriété 68 résulte du fait que dN_t ne prend que les valeurs 0 ou 1 et que, par conséquent, $(dN_t)^k = dN_t, \forall k \geq 1$. La propriété 69 est une écriture formelle. En effet, le nombre de sauts du processus sur l'intervalle continu $[0, t]$ étant fini, l'ensemble des points supports des sauts est de mesure nulle et la probabilité $\mathbb{P}(dN_t = 1)$ est nulle. Cette propriété s'entend dans le sens : la probabilité qu'il y ai un saut dans l'intervalle $[t, t + dt]$ est égale à $\lambda_t dt$.

Un exemple de trajectoire est représenté figure 2.2.

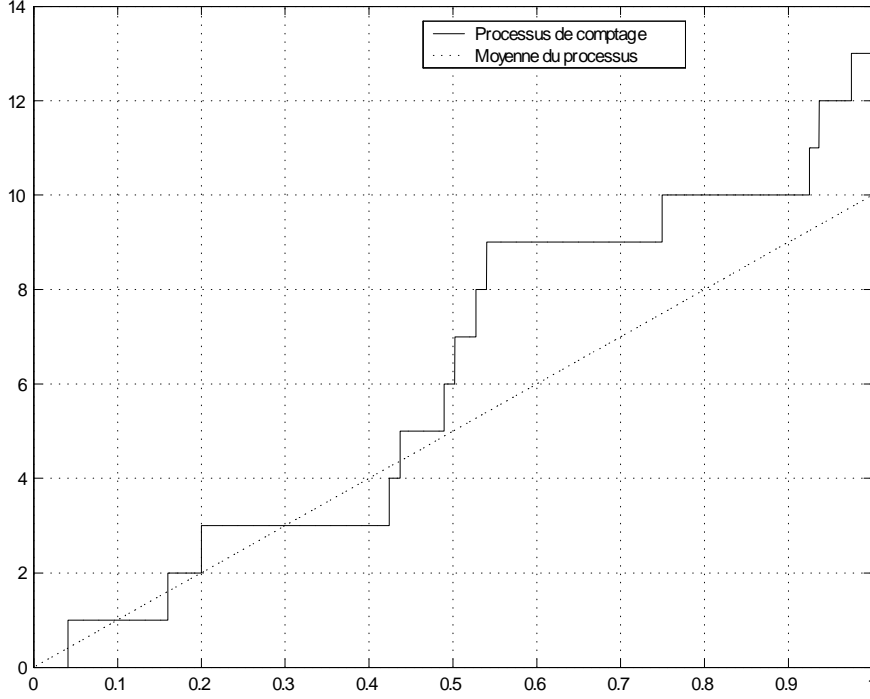


FIG. 2.2 – Exemple de trajectoire d'un processus de comptage

Processus de comptage marqués

Considérons le processus P_k^n introduit au début du paragraphe 2.2.2 défini comme la somme de ses accroissements :

$$P_k^n = \sum_{i=1}^k \Delta \pi_i^n$$

où, à la limite quand $\Delta t \rightarrow 0$, le nombre d'accroissements non nul reste fini. Nous avons établi au paragraphe précédent que, pour que les accroissements du processus soient indépendants, il est nécessaire que les sauts soient déclenchés par un processus de comptage N_t de fréquence λ_t . Afin de garantir que le processus ainsi construit soit un PAI, il est également nécessaires que les amplitudes de ces sauts finis (nommées "marques") soient indépendantes les unes des autres et du processus de comptage N_t . A chaque occurrence de saut ($dN_t = 1$), l'amplitude $d\pi_t$ de l'accroissement du processus peut alors être défini par :

$$d\pi_t = u_t dN_t$$

où u_t est une variable aléatoire indépendante de distribution $dP_t(u)$, éventuellement variable avec le temps (de manière déterministe). La définition d'un processus de comptage marqué est donc la suivante :

Définition 70. *Un processus à temps continu π_t est un processus de comptage marqué de fréquence λ_t et distribution d'amplitudes $P_t(u)$ s'il possède les propriétés suivantes : les instants d'occurrence des sauts de π_t sont réglés par un processus de Poisson N_t de fréquence λ_t , indépendant de la marque $U \in \mathcal{U}$; les amplitudes des sauts (les marques) sont mutuellement indépendantes et de même loi $P_t(u)$ et indépendante de N_t .*

Pour écrire le processus π_t comme somme de ses accroissements et afin de donner une expression intégrale similaire à celle du mouvement brownien 2.2, on est amené à distinguer, en fonction de la valeur de la marque $U \in \mathcal{U}$, le processus de comptage associé à celle-ci.

Considérons dans un premier temps un espace de marques fini à valeurs dans $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$. Soit N_t le processus de comptage de fréquence λ_t qui déclenche les sauts. Lorsqu'à l'instant t , un saut survient ($dN_t = 1$), l'amplitude du saut est une variable aléatoire à valeurs dans \mathcal{U} distribuée selon une certaine loi ($\mathbb{P}(U_t = u_i) = p_t^i$). Soit $N_t(u_i)$ le processus de comptage qui "compte" les sauts de marque u_i . Pour évaluer sa fréquence, calculons :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(dN_t(u_i) = 1) &= \mathbb{P}(dN_t = 1 \wedge U_t = u_i) \\ &= \mathbb{P}(dN_t = 1) \mathbb{P}(U_t = u_i) \\ &= \lambda_t p_t^i dt\end{aligned}$$

la réalisation de la marque étant, par hypothèse, indépendante du processus de comptage. La fréquence de ce processus est donc égale à $\lambda_t p_t^i$ et :

$$\mathbb{E}[dN_t(u_i)] = \lambda_t p_t^i dt$$

. Le processus π_t peut alors être représenté comme la somme de ses accroissements sur chacune des marques :

$$\begin{aligned}d\pi_t &= \sum_{i=1}^m u_i dN_t(u_i) \\ \pi_t &= \sum_{i=1}^m u_i N_t(u_i)\end{aligned}$$

Cette représentation peut être généralisée au cas où l'espace des marques \mathcal{U} est continu. Pour ce faire, il suffit de considérer les processus $N_t(du)$ qui comptent les sauts dont la marque appartient à l'intervalle $[u, u + du]$. Si \mathbb{P}_{U_t} désigne la mesure de probabilité de la marque à l'instant t , la fréquence de ce processus sera alors $\lambda_t \mathbb{P}_{U_t}(du_t)$ et :

$$\mathbb{E}[dN_t(du)] = \lambda_t \mathbb{P}_{U_t}(du_t) dt \quad (2.5)$$

On obtient alors une représentation de π_t comme suit :

$$d\pi_t = \int_{\mathcal{U}} u dN_t(du) \quad (2.6)$$

$$\pi_t = \int_{\mathcal{U}} u N_t(du) \quad (2.7)$$

Un exemple de réalisation d'un processus de comptage marqué est représenté figure 2.3.

2.2.3. Bruits blancs à temps continu

Les bruits blancs sont des processus à réalisation indépendantes dans le temps. Ils s'obtiennent à partir de la construction des processus à accroissements indépendants et obtenus par dérivation par rapport au temps de ceux-ci. Comme nous l'avons souligné plus haut, le terme "blanc" se réfère à la densité spectrale de puissance de ces processus (vois annexe A) qui est constante sur tout le spectre, comme l'est la lumière blanche.

Remarque 71. Afin de simplifier la présentation des calculs qui suivront, nous omettrons de détailler le procédé de passage à la limite utilisé jusqu'alors dans les paragraphes 2.2.1 et 2.2.2. En particulier, les égalités qui suivent s'entendent au sens suivant : si on considère le

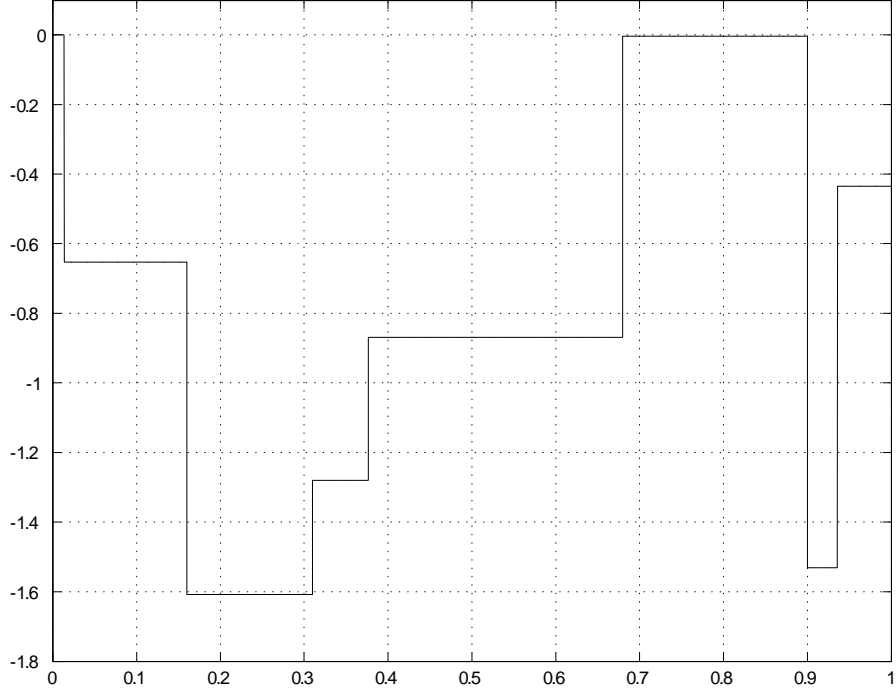


FIG. 2.3 – Exemple de réalisation de processus de comptage marqué.

procédé de discrétisation utilisé dans ces paragraphes, découpage de l'intervalle de temps en n sous-intervalles de largeur Δt , les égalités ont le sens suivant :

$$\begin{aligned} d\beta_t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta\beta_k^n \\ dN_t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta N_k^n \\ dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta t \end{aligned}$$

De plus, l'écriture $t \neq s$ ou $t = s$ s'entendent également à la limite, c'est à dire :

$$\begin{aligned} t \neq s &\xLeftrightarrow[n \rightarrow \infty]{} t \in [k\Delta t, k\Delta t + \Delta t], t \in [l\Delta t, l\Delta t + \Delta t], k \neq l \\ t = s &\xLeftrightarrow[n \rightarrow \infty]{} t, s \in [k\Delta t, k\Delta t + \Delta t] \end{aligned}$$

Bruit blanc gaussien

Le bruit blanc gaussien, à temps continu, est défini formellement comme la dérivée par rapport au temps du mouvement brownien β_t défini en 2.2.1, soit le processus :

$$\dot{\beta}_t = \frac{d\beta_t}{dt}$$

Il est important de remarquer que cette quantité ne peut pas avoir de réalité physique dans la mesure où, comme nous l'avons remarqué, le mouvement brownien est nulle part dérivable. En fait, dans cette idéalisation, le bruit blanc gaussien est une variable aléatoire distribuée selon une loi gaussienne de variance infinie. En effet, d'après la propriété 62 :

$$\left(\dot{\beta}_t\right)^2 = \frac{Q_t dt}{(dt)^2} = \frac{Q_t}{dt}$$

Si la variance Q_t est indépendante du temps t , le processus est stationnaire au second ordre. On a alors :

Théorème 72. *La densité spectrale d'un bruit blanc gaussien stationnaire à temps continu est constante.*

Preuve. En utilisant les conventions de la remarque 71, son autocorrélation est définie formellement par :

$$\mathbb{E}[\dot{\beta}_t \dot{\beta}_s] = \frac{\mathbb{E}[d\beta_t d\beta_s]}{dtds}$$

Les accroissements $d\beta_t$ et $d\beta_s$ étant indépendants, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}[d\beta_t d\beta_s]}{dtds} &= 0, \forall t \neq s \\ \frac{\mathbb{E}[(d\beta_t)^2]}{(dt)^2} &= \frac{Qdt}{(dt)^2} = \frac{Q}{dt} \end{aligned}$$

en vertu de la propriété 62. Lorsque $dt \rightarrow 0$, cette fonction tend vers la mesure de Dirac de support 0 et de masse Q :

$$\mathbb{E}[\dot{\beta}_t \dot{\beta}_s] = Q\delta_0(t)$$

D'après la définition 88, la densité spectrale de puissance du processus est transformée de Fourier de la mesure de Dirac de masse Q qui est égale à une constante sur tout le spectre et égale à Q . ■

Cela se traduit par le fait que, pour un bruit blanc, le contenu spectral est uniforme et qu'aucune fréquence n'est privilégiée. C'est d'ailleurs l'origine du terme, en référence à la lumière blanche pour laquelle toutes les composantes de couleur ont la même intensité.

Exemple 73. *L'exemple type du bruit blanc gaussien est le bruit thermique, tension présente aux bornes d'une résistance R portée à la température T_0 . On peut montrer que dans ce cas, la densité spectrale de ce bruit est $Q = 2kRT_0$ où k est la constante de Boltzmann. En réalité, ce bruit n'est évidemment pas de puissance infinie, comme l'est le bruit blanc théorique, mais chute rapidement à partir de la fréquence 6×10^{12} Hz.*

Bruits blanc impulsionsnels

De même, le bruit blanc poissonien peut être défini comme la dérivée formelle par rapport au temps du processus de comptage N_t centré (défini en 2.2.2), c'est à dire auquel on a retiré sa moyenne :

$$\begin{aligned} d\tilde{N}_t &\triangleq dN_t - \mathbb{E}[dN_t] \\ &= dN_t - \lambda_t dt \end{aligned}$$

d'après la propriété 66. On obtient alors la définition formelle du bruit blanc poissonien comme suit :

$$\tilde{N}_t = \frac{d\tilde{N}_t}{dt} = \frac{dN_t}{dt} - \lambda_t$$

Si la fréquence λ est indépendante du temps, un tel processus est stationnaire et, à nouveau :

Théorème 74. *La densité spectrale d'un bruit blanc poissonien stationnaire à temps continu est constante.*

Preuve. En utilisant les conventions de la remarque 71, les accroissements $d\tilde{N}_t \triangleq dN_t - \lambda dt$ et $d\tilde{N}_s = dN_s - \lambda ds$ étant indépendants et de moyenne nulle, son autocorrélation est définie formellement par :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E} [d\tilde{N}_t d\tilde{N}_s]}{dt ds} &= \frac{\mathbb{E} [d\tilde{N}_t] \mathbb{E} [d\tilde{N}_s]}{dt ds} = 0, \forall t \neq s \\ \frac{\mathbb{E} \left[\left(d\tilde{N}_t \right)^2 \right]}{(dt)^2} &= \frac{\mathbb{E} [(dN_t)^2] - (\lambda dt)^2}{(dt)^2} = \frac{\lambda}{dt} - \lambda \underset{dt \rightarrow 0}{\sim} \frac{\lambda}{dt} \end{aligned}$$

en vertu des propriétés 67 et 68. Lorsque $dt \rightarrow 0$, cette fonction tend vers la mesure de Dirac de support 0 et de masse λ :

$$\mathbb{E}[\tilde{N}_t \tilde{N}_s] = \lambda \delta_0(t - s)$$

et sa densité spectrale de puissance, transformée de Fourier de son autocorrélation, est une constante égale à λ . ■

A noter que l'analyse au second ordre ne sait pas faire la différence entre un bruit blanc gaussien et un bruit blanc poissonien qui, cependant, sont radicalement différents du point de vue de leurs trajectoires.

Enfin, un bruit blanc ponctuel sera défini comme la dérivée formelle, par rapport au temps, d'un processus de comptage marqué centré :

$$d\tilde{\pi}_t \triangleq d\pi_t - \mathbb{E} [d\pi_t]$$

On obtient alors :

$$\tilde{\pi}_t \triangleq \frac{d\tilde{\pi}_t}{dt}$$

Si le processus est stationnaire, c'est à dire si λ_t et $p_t(u)$ sont indépendants du temps, on a de même :

Théorème 75. *La densité spectrale d'un bruit blanc ponctuel stationnaire à temps continu est constante.*

Preuve. Utilisons la représentation des accroissements du processus de l'expression 2.7 :

$$d\pi_t = \int_{\mathcal{U}} u dN_t(du)$$

Notons que les accroissements centrés peuvent s'écrire :

$$d\tilde{\pi}_t = \int_{\mathcal{U}} \tilde{u} dN_t(du)$$

où $\tilde{u} \triangleq u - \mathbb{E}[u]$. En effet, d'après l'équation 2.5, $\mathbb{E}[dN_t(du)] = \mathbb{P}_U(du) \lambda dt$. D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[d\tilde{\pi}_t] &= \int_{\mathcal{U}} \tilde{u} \mathbb{E}[dN_t(du)] \\ &= \left(\int_{\mathcal{U}} \tilde{u} \mathbb{P}_U(du) \right) \lambda dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après la définition de \tilde{u} .

L'autocorrélation du bruit blanc ponctuel s'écrit alors :

$$\mathbb{E} \left[\frac{d\tilde{\pi}_t d\tilde{\pi}_s}{dtds} \right] = \int_{\mathcal{U}} \int_{\mathcal{U}} \tilde{u}\tilde{v} \mathbb{E} \left[\frac{dN_t(du) dN_s(dv)}{dtds} \right]$$

Or, la propriété d'accroissements indépendants permet d'écrire, en utilisant à nouveau l'expression 2.5 :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E} [dN_t(du) dN_s(dv)]}{dtds} &= \frac{\mathbb{E} [dN_t(du)]}{dt} \frac{\mathbb{E} [dN_s(dv)]}{ds} = \mathbb{P}_U(du) \mathbb{P}_U(dv) dv (\lambda)^2, \forall t \neq s \\ \frac{\mathbb{E} [dN_t(du) dN_t(dv)]}{(dt)^2} &= \begin{cases} \frac{\mathbb{E}[dN_t(du)]\mathbb{E}[dN_t(dv)]}{(dt)^2} = \mathbb{P}_U(du) \mathbb{P}_U(dv) \lambda^2, \forall u \neq v \\ \frac{\mathbb{E}[(dN_t(du))^2]}{(dt)^2} = \frac{\mathbb{P}_U(du)\lambda}{dt}, \forall u = v \end{cases} \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbb{E} \left[\frac{d\tilde{\pi}_t d\tilde{\pi}_s}{dtds} \right] = \begin{cases} \int_{\mathcal{U}} \int_{\mathcal{U}} \tilde{u}\tilde{v} \mathbb{P}_U(du) \mathbb{P}_U(dv) (\lambda)^2 = 0, \forall t \neq s \\ \int_{\mathcal{U}} (\tilde{u})^2 \mathbb{P}_U(du) \frac{\lambda}{dt} = \mathbb{E}[(\tilde{u})^2] \frac{\lambda}{dt}, \forall t = s \end{cases}$$

Le passage à la limite $dt \rightarrow 0$ donne finalement :

$$\mathbb{E} \left[\frac{d\tilde{\pi}_t d\tilde{\pi}_s}{dtds} \right] = \mathbb{E}[(\tilde{u})^2] \lambda \delta_0(t - s)$$

Par conséquent, par transformée de Fourier, la densité spectrale de puissance d'un bruit blanc ponctuel est une constante égale à $\mathbb{E}[(\tilde{u})^2] \lambda$, produit de la variance de la marque par la fréquence des sauts du processus. ■

Exemple 76. En télécommunication à très basse fréquence, c'est à dire inférieure à 30 kHz (VLF), la décharge électrique due à la foudre se traduit par la présence très fortes perturbations de type impulsionnelles à occurrences aléatoires de type poissonienne. Un exemple de réalisation de telles perturbations (données réelles) est représenté sur la figure 2.4. Naturellement, comme ces données sont échantillonnées, on n'observe pas une "vraie impulsion", d'ailleurs sans réalité physique, mais le signal obtenu après le filtrage passe-bas nécessaire à l'échantillonnage (voir paragraphe 2.4.2).

2.3. Caractérisation des processus markovien

Selon la nature des espaces d'état E et de temps T , la construction des processus markoviens diffère. Examinons comment, dans les différents contextes de notre classification.

2.3.1. Processus discrets à temps discret

C'est le cas le plus simple de processus markoviens qu'on peut imaginer. Considérons un processus stochastique S_t défini sur un espace discret (de cardinal fini m). On peut toujours se ramener à un espace $E = \{1, \dots, m\}$ par numérotation de chacun des états. La modélisation d'un tel processus stochastique est alors réalisée par la donnée de la condition initiale, c'est à dire

$$\{\mathbb{P}(S_0 = s_0), \forall s_0 \in E\}$$

et par la donnée des probabilités de transition d'un état à un autre :

$$\mathbb{P}(S_t = s_t | S_{t-1} = s_{t-1}), \forall s_t, s_{t-1} \in E$$

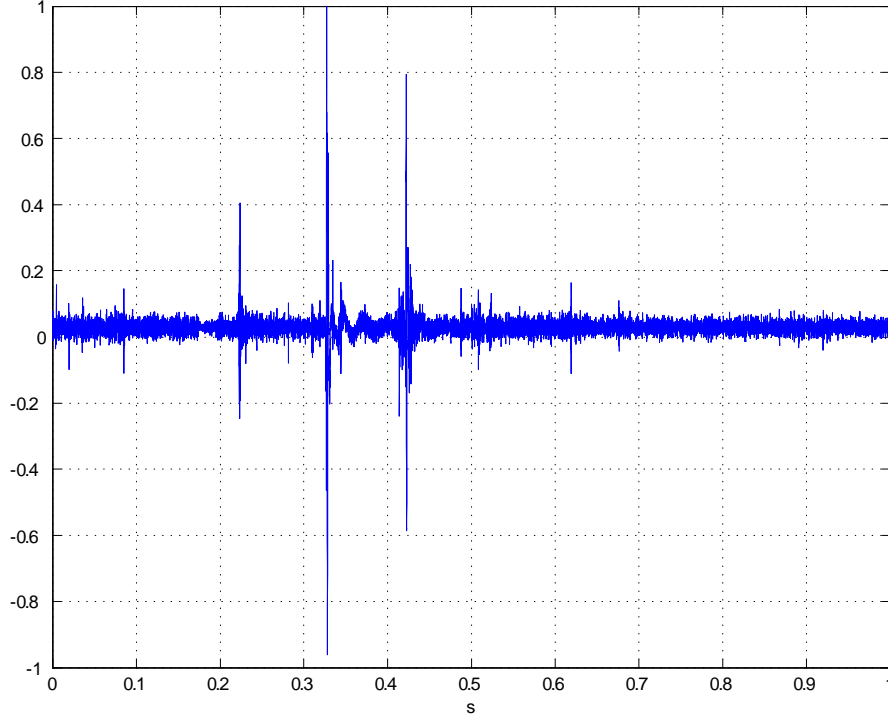


FIG. 2.4 – Exemple de bruit VLF

Notation 77. *A noter que nous utilisons ici la notation $\mathbb{P}(S_0 = s_0)$ au lieu de $\mathbb{P}_{S_0}(s_0)$, ceci pour rendre la lecture plus intuitive : $\mathbb{P}(S_0 = s_0)$ peut s'énoncer " la probabilité pour que le processus S_0 prenne la valeur s_0 ."*

A chaque instant t , la distribution de probabilité de S_t est représentée par l'ensemble $\{\mathbb{P}(S_t = s_t), \forall s_t \in E\}$. L'évolution de l'état du processus peut alors s'écrire en termes de probabilités en utilisant la version discrète du théorème 54 comme suit :

$$\mathbb{P}(S_t = s_t) = \sum_{s_{t-1}=1}^m \mathbb{P}(S_t = s_t \wedge S_{t-1} = s_{t-1}) \quad (2.8a)$$

$$= \sum_{j=1}^m \mathbb{P}(S_t = s_t | S_{t-1} = s_{t-1}) \mathbb{P}(S_{t-1} = s_{t-1}) \quad (2.8b)$$

Si on note $\mu_t \triangleq [\mathbb{P}(S_t = 1) \dots \mathbb{P}(S_t = m)]^T$ le vecteur de \mathbb{R}^m désignant la distribution probabiliste de l'état à l'instant t et P_t la matrice de $\mathbb{R}^{m \times m}$ dont le terme de rang (i, j) est égale à la probabilité de transition $\mathbb{P}(S_t = i | S_{t-1} = j)$, la transition définie par l'équation 2.8 se traduit par le produit matriciel suivant :

$$\mu_t = P_t \mu_{t-1}$$

En itérant cette équation d'évolution, on obtient la probabilité du processus à l'instant t à partir de la condition initiale μ_0 selon :

$$\mu_t = P_t \dots P_1 \mu_0$$

Exemple 78. *Le codage en télécommunications numériques.*

2.3.2. Processus discrets à temps continu

Soit $S_t \in E = \{1 \dots m\}$, $t \in \mathbb{R}$ un processus discret à temps continu. Pour définir ce processus, on est amené à définir ses probabilités de transition sur tout intervalle de temps, soit l'ensemble $\{\mathbb{P}(S_{t+dt} = i | S_t = j), \forall i, j \in E\}$. Pour que ce processus ne soit pas dégénéré, il apparaît nécessaire que le nombre de transitions sur un intervalle de temps fini $[0, t]$ soit lui-même fini. Pour ce faire, il suffit que la probabilité pour que le processus "saute" de la valeur courante à une autre valeur ($S_{t+dt} \neq S_t$) soit proportionnelle à dt :

$$\mathbb{P}(S_{t+dt} \neq S_t | S_t = j) = \lambda_t^j dt$$

et, par conséquent :

$$\mathbb{P}(S_{t+dt} = i | S_t = j) = 1 - \lambda_t^j dt$$

On peut dire que λ_t^j désigne la fréquence à laquelle le processus quitte l'état j . Dans l'hypothèse où l'état quitte la position j , il est nécessaire, comme au paragraphe 2.3.1, de définir les probabilités de transition vers un autre état, à savoir :

$$Q_t^{ij} = \mathbb{P}(S_{t+dt} = i | S_t = j \wedge S_{t+dt} \neq S_t), \forall i \neq j$$

Observons alors comment la distribution de probabilité $\mathbb{P}(S_t = i)$ évolue au cours du temps. Pour ce faire, utilisons la version discrète du théorème 54 et considérons cette probabilité comme la marginale suivante :

$$\mathbb{P}(S_{t+dt} = i) = \sum_{j=1}^m \mathbb{P}(S_{t+dt} = i \wedge S_t = j)$$

Par définition de la probabilité conditionnelle, cette expression peut être réécrite :

$$\mathbb{P}(S_{t+dt} = i) = \sum_{j=1}^m \mathbb{P}(S_{t+dt} = i | S_t = j) \mathbb{P}(S_t = j)$$

Séparons alors dans cette somme les deux cas évoqués plus haut, à savoir $S_{t+dt} = S_t$ et $S_{t+dt} \neq S_t$:

$$\mathbb{P}(S_{t+dt} = i) = (1 - \lambda_t^i dt) \mathbb{P}(S_t = i) + \sum_{j \neq i=1}^m \mathbb{P}(S_{t+dt} = i | S_t = j) \mathbb{P}(S_t = j)$$

Or, pour $i \neq j$, $\mathbb{P}(S_{t+dt} = i | S_t = j) = \lambda_t^j dt Q^{ij}$. Par conséquent, on a :

$$\frac{\mathbb{P}(S_{t+dt} = i) - \mathbb{P}(S_t = i)}{dt} = -\lambda_t^i \mathbb{P}(S_t = i) + \sum_{j \neq i=1}^m \lambda_t^j Q^{ij} \mathbb{P}(S_t = j) \quad (2.9)$$

Si on note $\mu_t \triangleq [\mathbb{P}[S_t = 1] \dots \mathbb{P}[S_t = m]]^T$ le vecteur désignant la distribution probabiliste de l'état à l'instant t , et si on construit la matrice P de $\mathbb{R}^{m \times m}$ définie par :

$$\begin{aligned} P_t^{ii} &= -\lambda_t^i \\ P_t^{ij} &= \lambda_t^j Q^{ij}, \forall i \neq j \end{aligned}$$

Par passage à la limite, l'équation 2.9 s'écrit alors sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{\mu}_t = P_t \mu_t$$

Connaissant l'état initial μ_0 , on est alors capable, par intégration de cette équation différentielle, de déterminer la mesure de probabilité de μ_t . En particulier, si les transitions sont stationnaires (indépendantes du temps), on obtient :

$$\mu_t = e^{tP} \mu_0$$

Exemple 79. Le phénomène qui gouverne l'apparitions de pannes sur un système peut être modélisé de la sorte. Si on énumère l'ensemble des pannes pouvant survenir sur un procédé, on peut modéliser chacune des situations par un état discret : état "normal", état "panne du composant i ", ... En fonction du degré de fiabilité des différents composants du système, on sera amené à définir différents valeurs de probabilité de passer d'un état "normal" à un état "panne". Par exemple, on pourra considérer que la probabilité qu'une panne d'un composant survienne est naturellement plus faible que la probabilité qu'il demeure en fonctionnement normal. De même, la probabilité qu'un composant se répare seul, passage d'un état "panne" à l'état "normal" pourra être fixée à 0. On peut également représenter le phénomène de panne en cascade en affectant une certaine probabilité de passer de "panne du composant i " à "panne du composant j ". etc.

2.3.3. Processus continus à temps discret

Le processus markovien $X_t \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{N}$ est dans ce cas défini par sa mesure de probabilité de transition $\mathbb{P}_{X_t|X_{t-1}}(dx_t|x_{t-1})$. L'utilisation récurrente du théorème 54 permet alors, au moins théoriquement, de calculer la probabilité $\mathbb{P}_{X_t}(dx_t)$ à partir de la connaissance de $\mathbb{P}_{X_0}(dx_0)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X_t}(dx_t) &= \int \mathbb{P}_{X_t|X_{t-1}}(dx_t|x_{t-1}) \mathbb{P}_{X_{t-1}}(dx_{t-1}) \\ &= \int \dots \int \mathbb{P}_{X_t|X_{t-1}}(dx_t|x_{t-1}) \dots \mathbb{P}_{X_1|X_0}(dx_1|x_0) \mathbb{P}(dx_0)\end{aligned}$$

où l'intégration est faite sur les variables x_0, \dots, x_{t-1} . Si dans le cas où l'espace est fini, on peut envisager aisément d'énumérer l'ensemble des transitions possibles et de leurs affecter leur probabilités, ce n'est évidemment plus vrai quand l'espace est continu. En général, la modélisation de tels processus fournit une équation d'évolution de type déterministe par une équation aux différences du type :

$$x_t = f(t, x_{t-1}, w_t), \quad x_t \in \mathbb{R}^n, \quad w_t \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{N} \quad (2.10)$$

où w_t représente les entrées du système qui modifient sont comportement dynamique. L'aspect aléatoire est alors rejeté dans la méconnaissance de ces entrées. On parle parfois de systèmes dynamiques à entrées non mesurées.

Pour que le système ainsi modélisé soit markovien, il est nécessaire que ces entrées soient des bruits blancs. En effet, en terme de réalisation, X_t est une fonction de X_0 et de la réalisation de la séquence de bruits $\{W_0, \dots, W_{t-1}\}$. Si le bruit W_t est indépendant de son propre passé (et de X_0), il est également indépendant de X_t . Par conséquent, sachant X_t , la variable aléatoire X_{t+1} dépend uniquement de la réalisation de W_t présente et non du passé du processus $\{X_\tau, \tau < t\}$. Si d'aventure, le processus W_t n'est pas un bruit blanc, il est nécessaire, pour construire un processus markovien, de décrire la "machine" qui l'engendre à partir d'un bruit blanc. En d'autres termes, si le bruit W_t est "coloré", cela signifie que toutes la connaissance que nous avons de ce processus n'est pas épuisée.

Ainsi, la donnée de X_{t-1} et de la distribution du bruit blanc W_t détermine complètement la distribution de X_t , définissant par là la probabilité de transition $\mathbb{P}_{X_t|X_{t-1}}(dx_t|x_{t-1})$.

Plus précisément, supposons dans un premier temps que $m = n$ et que la fonction $f(t, x_{t-1}, \bullet)$ soit inversible et continûment différentiable : $w_t = f^{-1}(t, x_{t-1}, x_t)$. Considérons un voisinage du point x_t de volume infinitésimal dx_t . Au voisinage du point $w_t = f^{-1}(t, x_{t-1}, x_t)$, le volume image par la fonction f^{-1} est défini par :

$$dw_t = \left| \frac{\partial f^{-1}}{\partial x_t} \right| dx_t$$

où $\left| \frac{\partial f^{-1}}{\partial x_t} \right|$ est le jacobien de f^{-1} . Par conséquent, la mesure de probabilité de transition s'exprime selon :

$$\mathbb{P}_{X_t|X_{t-1}}(dx_t|x_{t-1}) = \mathbb{P}_{W_t} \left(\left| \frac{\partial f^{-1}(t, x_{t-1}, x_t)}{\partial x_t} \right| dx_t \right) \quad (2.11)$$

Si la mesure de W_t est à densité, on peut écrire :

$$\mathbb{P}_{W_t}(dw_t) = p_{W_t}(w_t) dw_t$$

où $p_{W_t}(w_t)$ désigne la densité de probabilité de W_t évaluée au point w_t . Comme W_t possède une mesure à densité et que la fonction f^{-1} est continue, x_t possède également une densité. L'expression 2.11 se transforme alors en :

$$p_{X_t|X_{t-1}}(x_t|x_{t-1}) dx_t = p_{W_t}(f^{-1}(t, x_{t-1}, x_t)) \left| \frac{\partial f^{-1}}{\partial x_t} \right| dx_t$$

Noter qu'on aurait pu obtenir directement cette formule en appliquant le théorème 31 relatif aux formules de changement de variable pour obtenir :

$$p_{X_t|X_{t-1}}(x_t|x_{t-1}) dx_t = p_{W_t}(f^{-1}(t, x_{t-1}, x_t)) \left| \frac{\partial f^{-1}}{\partial x_t} \right| dx_t$$

Si $m < n$, ce qui est la plupart du temps le cas, la fonction $f(t, x_t, \bullet)$ ne peut pas être inversible. Cela signifie que pour une transition donnée, certaines composantes de l'état sont liées. En faisant appel au théorème de fonctions implicites et en réalisant un changement de variable, il est alors en général possible de partitionner l'espace d'état obtenu après changement de variable de telle sorte que le système 2.10 s'écrive dans les nouvelles coordonnées :

$$\begin{aligned} x_t^1 &= f_1(t, x_{t-1}, w_t) \\ x_t^2 &= f_2(t, x_{t-1}) \end{aligned}$$

où f_1 est inversible par rapport à w_t . On peut alors décomposer le voisinage dx_t de x_t en le produit de deux voisinages dx_t^1 et dx_t^2 . En utilisant la définition de la probabilité conditionnelle on obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{X_t|X_{t-1}}(dx_t|x_{t-1}) &= \mathbb{P}_{X_t^1, X_t^2|X_{t-1}}(dx_t^1, dx_t^2|x_{t-1}) \\ &= \mathbb{P}_{X_t^2|X_t^1, X_{t-1}}(dx_t^2|x_t^1, x_{t-1}) \mathbb{P}_{X_t^1|X_{t-1}}(dx_t^1|x_{t-1}) \end{aligned}$$

La liaison entre x_t^2 et x_{t-1} étant déterministe, on a :

$$\mathbb{P}_{X_t^2|X_{t-1}}(dx_t^2|x_{t-1}) = \delta_{f_2(t, x_{t-1})}(dx_t^2)$$

et :

$$\mathbb{P}_{X_t^1|X_{t-1}}(dx_t^1|x_{t-1}) = \mathbb{P}_{W_t} \left(\frac{\partial f_1^{-1}(t, x_{t-1}, x_t)}{\partial x_t} dx_t^1 \right)$$

Par conséquent, la mesure de transition s'écrit :

$$\mathbb{P}_{X_t|X_{t-1}}(dx_t|x_{t-1}) = \mathbb{P}_{W_t} \left(\frac{\partial f_1^{-1}(t, x_{t-1}, x_t)}{\partial x_t} dx_t^1 \right) \delta_{f_2(t, x_{t-1})} dx_t^2$$

Si la mesure de W_t est à densité, cette expression devient :

$$\mathbb{P}_{X_t|X_{t-1}}(dx_t|x_{t-1}) = p_{W_t}(f_1^{-1}(t, x_{t-1}, x_t^1)) \left| \frac{\partial (f_1)^{-1}}{\partial x_t^1} \right| \delta_{f_2(t, x_{t-1})}(dx_t^2)$$

et on constate que, même si W_t possède une mesure à densité, la mesure de transition $\mathbb{P}_{X_t|X_{t-1}}(dx_t|x_{t-1})$ possède en général une partie singulière.

2.3.4. Processus continu à temps continu

Si on reprend la même démarche que celle poursuivie au paragraphe 2.3.3, un système dynamique continu à temps continu est classiquement modélisé par une équation différentielle ordinaire du type suivant :

$$\frac{dx_t}{dt} = f(t, x_t, u_t), \quad x_t \in \mathbb{R}^n, \quad u_t \in \mathcal{U}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

à laquelle il faut ajouter la définition de la condition initiale x_0 . Ce modèle est généralement issu de l'application des lois de la physique, de la chimie, de l'électromagnétisme,... Pour que cette équation ait un sens et pour garantir l'unicité de la solution, il est nécessaire que [2] les conditions suivantes soient vérifiées :

- La fonction f doit être Lipschitz par rapport à x_t , c'est à dire à variations bornées :

$$\exists K \in \mathbb{R} / \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathcal{U}, \|f(t, x, u) - f(t, y, u)\| < K \|x - y\|$$

- L'entrée u_t doit être continue par morceaux, c'est à dire continue sauf pour un nombre fini de points supports.

Par extension au cas stochastique, les processus markoviens peuvent généralement être représentés par une équation d'état dont les entrées sont cette fois les aléas qui gouvernent l'évolution de celui-ci. Afin de revenir à l'essence de ce qui gouverne le processus, ces entrées seront modélisées comme des bruits blancs, variables sans mémoire, assurant ainsi que toute la connaissance qu'on peut avoir sur le processus a été exploitée. Nous avons mis en évidence deux classes fondamentales de bruits blancs, selon qu'ils étaient issus de processus à accroissements indépendants continus (bruit blanc gaussien $d\beta_t/dt$) ou purement discontinu (bruit blanc ponctuel $dN_t(du)$). Il est clair que de tels processus, les bruits blancs, ne satisfont pas la seconde condition nécessaire à l'existence d'une solution unique, ceux-ci n'étant même pas bornés. Il est cependant possible de donner un sens à une équation différentielle gouvernée par des bruits blancs à condition de prendre un certain nombre de précautions. Premièrement, les entrées (bruits blancs) doivent apparaître linéairement dans l'équation différentielle. On peut en effet définir par prolongement analytique une équation différentielle linéaire gouvernées par des entrées non bornées comme on le fait pour définir la réponse impulsionnelle d'un système linéaire (entrée de type mesure de Dirac). La forme générale de l'équation d'évolution sera alors la suivante :

$$dx_t = f(t, x_t)dt + g(t, x_t)d\beta_t + \int_U k(t, x_t, u)dN_t(du) \quad (2.13)$$

où $x_t \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système, β_t est un mouvement brownien de \mathbb{R}^m de matrice de covariance Q_t ($\mathbb{E}[d\beta_t d\beta_t^T] = Q_t dt$) et $dN_t(du)$ est un processus ponctuel de \mathbb{R}^p engendré par le processus de Poisson N_t de fréquence λ_t et dont les marques sont distribuées selon la loi $dP_t(u)$ ($\mathbb{E}[dN_t(du)] = \lambda_t dt dP_t(u)$). Il convient de plus de préciser la condition initiale du système à travers la définition de la distribution de probabilité $\mathbb{P}(dx_0)$. Le terme en dt de cette équation modélise la partie dite dérive du système, le terme en $d\beta_t$ la partie dite diffusive et le terme en $dN_t(du)$ la partie discontinue.

Cependant, cette définition demeure incomplète tant que nous n'avons pas précisé quel sens donner à cette équation différentielle stochastique. En effet, considérons par exemple la partie ponctuelle de l'équation. Comme nous l'avons souligné plus haut, l'élément différentiel n'est pas infinitésimal puisqu'il prend, au moment du saut, la valeur unité. Du fait du bouclage de x_t dans l'équation, il est nécessaire de définir sur quel point s'appuyer pour calculer l'incrément dx_t , celui-ci n'étant pas infinitésimal à l'occurrence d'un saut et la trajectoire de x_t étant par conséquent discontinue en ce point. Nous rencontrons la même difficulté pour définir la multiplication d'une mesure de Dirac par une fonction discontinue au point support de la mesure.

Pour donner un sens à cette équation différentielle stochastique, il suffit de définir une convention. Nous opterons pour la définition classique d'Itô qui prend pour point support le point situé "à gauche" dans le temps, qui, d'un point de vue numérique, correspond au schéma d'intégration d'Euler, c'est-à-dire la limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_{t-\varepsilon}$. Ce choix est relativement naturel si on adopte le principe de causalité c'est à dire si on admet que le passé engendre le présent. Plus précisément, l'équation 2.13 sera définie au sens suivant :

$$x_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_{t-\varepsilon} + f(t, x_{t-\varepsilon})\varepsilon + g(t, x_{t-\varepsilon})(\beta_t - \beta_{t-\varepsilon}) + \int_U k(t, x_{t-\varepsilon}, u)(N_t(du) - N_{t-\varepsilon}(du))$$

Sous les hypothèses de régularité suffisante des fonctions f, g, k (Lipschitziennes), un tel processus est bien défini et est continu à droite, limité à gauche. Par ailleurs, ce processus est bien markovien. En effet, les accroissements $d\beta_t$ et $dN_t(du)$ étant indépendants, ils sont indépendants du "passé" de x_t . Autrement dit, les accroissements $\beta_t - \beta_{t-\varepsilon}$ et $N_t(du) - N_{t-\varepsilon}(du)$ sont indépendants de l'ensemble $\{x_s, \forall s \leq t - \varepsilon\}$, et ceci quel que soit ε . La connaissance de la valeur de $x_{t-\varepsilon}$ et de la loi des accroissements des bruits suffit donc à décrire complètement la loi de x_t . A noter que pour une telle définition, l'équation d'évolution n'est pas réversible, les accroissements dx_t diffèrent selon le sens du temps choisi.

Une représentation équivalente mais moins rigoureuse de l'équation différentielle stochastique 2.13 est la suivante :

$$dx_t = f(t, x_t)dt + g(t, x_t)d\beta_t + k(t, x_t, u_t)dN_t$$

où N_t désigne le processus de comptage des sauts, indépendamment de la valeur prise par la marque, et où u_t désigne la valeur aléatoire prise par la marque à l'instant du saut de N_t . Cette écriture est moins rigoureuse que la précédente dans la mesure où elle fait apparaître un processus u_t comme un bruit blanc qui en réalité n'en est pas un, les valeurs prises par u_t en dehors des instants de saut n'ayant pas d'influence sur le processus x_t .

Remarque 80. Une alternative à cette définition qui rend l'intégration symétrique, et donc réversible, est celle proposée par Stratonovich [3]. Elle correspond au schéma d'intégration de Range-Kutta qui consiste à prendre appui sur le point milieu $(x_t - x_{t-\varepsilon})/2$.

Remarque 81. Si les fonctions g et k ne dépendent pas de x_t , toutes définitions de l'équation différentielle stochastique sont équivalentes.

Exemple 82. Pour illustrer la nécessité d'une telle définition, considérons le signal du télégraphiste qui peut être modélisé par l'équation suivante :

$$\begin{cases} dx_t = (1 - 2x_t)dN_t \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Considérons cette équation au sens d'Itô. A l'occurrence d'un saut ($dN_t = 1$), on obtient :

$$\begin{aligned} x_t &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_{t-\varepsilon} + (1 - 2x_{t-\varepsilon}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - x_{t-\varepsilon}) \end{aligned}$$

Partant de $x_0 = 0$, à l'occurrence du premier saut, on obtient $x_t = 1$. Au saut suivant, le schéma d'approximation donne $x_t = (1 - 1) = 0$. Ainsi, à chaque saut de N_t , l'état x_t commute entre les valeurs 0 et 1. Considérons à présent cette équation différentielle stochastique au sens de Stratonovich (voir remarque 80) qui consiste à prendre appui sur le point milieu $(x_t - x_{t-\varepsilon})/2$. A l'occurrence d'un saut ($dN_t = 1$), on a :

$$x_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_{t-\varepsilon} + 1 - 2 \frac{x_t - x_{t-\varepsilon}}{2} \implies x_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} + x_{t-\varepsilon}$$

Partant de $x_0 = 0$, à l'occurrence du premier saut, on obtient $x_t = 1/2$. Au saut suivant, le schéma donne $x_t = 1$ puis $x_t = 3/2$... On constate que les trajectoires résultantes sont totalement différentes en fonction du schéma d'intégration retenu.

2.3.5. Processus hybrides

On appellera processus hybride un processus dont l'espace d'état est composé d'une partie continue et d'une partie discrète. Cette partie discrète peut représenter, par exemple, un mode de fonctionnement d'un système (apparition de panne). Nous nous restreindrons ici au cas temps discret.

Si on note $X_t \in \mathbb{R}^n$ la partie continue et $S_t \in E = \{1, \dots, m\}$ la partie discrète, la représentation complète d'un système hybride à temps discret s'écrit alors :

$$x_t = f(t, x_{t-1}, s_{t-1}, w_t)$$

où w_t est un bruit blanc à temps discret, indépendant de S_t . L'évolution de l'état discret S_t est représenté par ses probabilités de transition markoviennes sous la forme de l'ensemble $\{\mathbb{P}(S_t = i | S_{t-1} = j), \forall i, j = 1 \dots m\}$. Comme d'habitude, il faut ajouter à cette définition du système la probabilité initiale de l'état \mathbb{P}_{X_0} et $\mu_0 \triangleq [\mathbb{P}(S_0 = 1) \dots \mathbb{P}(S_0 = m)]^T$.

Les mesures de probabilité de transition de l'état continu sont définies pour chaque valeur de S_t comme au paragraphe 2.3.3 sous la forme :

$$\mathbb{P}_{X_t | X_{t-1}, S_{t-1}}(dx_t | x_{t-1}, s_{t-1})$$

L'évolution de la probabilité conjointe \mathbb{P}_{X_t, S_t} s'obtient par une double sommation : l'une sur l'espace continu X_{t-1} et l'autre sur l'espace discret S_{t-1} . On écrit donc :

$$\mathbb{P}_{X_t}(dx_t, s_t) = \sum_{s_{t-1}=1}^m \int \mathbb{P}_{X_t, X_{t-1}, S_t, S_{t-1}}(dx_t, dx_{t-1}, s_t, s_{t-1})$$

Par définition de la probabilité conditionnelle, on a :

$$\mathbb{P}_{X_t, S_t, S_{t-1}}(dx_t, dx_{t-1}, s_t, s_{t-1}) = \mathbb{P}_{X_t, S_t, S_{t-1}}(dx_t | x_{t-1}, s_t, s_{t-1}) \mathbb{P}_{X_t, S_t, S_{t-1}}(dx_{t-1}, s_t, s_{t-1}) \quad (2.14)$$

L'évolution de S_t étant supposée indépendante du processus X_t , on peut écrire que :

$$\mathbb{P}_{X_t, S_t, S_{t-1}}(dx_t | x_{t-1}, s_t, s_{t-1}) = \mathbb{P}_{X_t, S_t, S_{t-1}}(dx_t | x_{t-1}, s_{t-1})$$

En introduisant à nouveau la probabilité conditionnelle sur S_t dans le deuxième terme de 2.14, on obtient :

$$\mathbb{P}_{X_t, S_t, S_{t-1}}(dx_{t-1}, s_t, s_{t-1}) = \mathbb{P}_{S_t | S_{t-1}, X_{t-1}}(s_t | s_{t-1}, x_{t-1}) \mathbb{P}_{X_{t-1}, S_{t-1}}(dx_{t-1}, s_{t-1})$$

Le processus S_t étant indépendant du processus X_t , $\mathbb{P}_{S_t | S_{t-1}, X_{t-1}}(s_t | s_{t-1}, x_{t-1}) = \mathbb{P}_{S_t | S_{t-1}}(s_t | s_{t-1})$. L'évolution de la mesure de probabilité conjointe s'exprime donc finalement selon :

$$\mathbb{P}_{X_t}(dx_t, s_t) = \sum_{s_{t-1}=1}^m \int \mathbb{P}_{X_t, S_t, S_{t-1}}(dx_t | x_{t-1}, s_{t-1}) \mathbb{P}_{S_t | S_{t-1}}(s_t | s_{t-1}) \mathbb{P}_{X_{t-1}, S_{t-1}}(dx_{t-1}, s_{t-1})$$

2.4. Modélisation à temps discret des processus stochastiques markoviens

De par leur complexité calculatoire, les techniques d'estimation et de traitement avancé du signal que nous allons développer ici ne peuvent être mises en oeuvre que sous forme numérique par utilisation d'un ordinateur. Ces traitements utilisent deux types de modèles : les modèles de prédiction des variables internes du système et les modèles des capteurs du système. Les modèles de prédiction stochastique décrits dans le chapitre 2, issus généralement de la modélisation physique des phénomènes, doivent donc être discrétisés dans le temps². De même, dans la plupart des cas, les mesures physiques réalisées sur un système sont continues dans le temps (positions, vitesses, tensions, températures, ...). Pour pouvoir être traitées numériquement par ordinateur, ces informations continues issues des capteurs doivent être échantillonnées. Le passage d'un modèle continu à un modèle à temps discret nécessite donc attention particulière. Nous allons donc brièvement montrer comment on peut passer d'un modèle à l'autre et rappeler les principes de base de l'échantillonnage des processus.

2.4.1. Modèle à temps discret d'un système dynamique stochastique

Considérons un processus markovien, à temps continu, tel que ceux décrits dans le chapitre 2. Si on se restreint aux processus markovien, on a établi qu'un tel processus pouvait être représenté par une équation différentielle stochastique du type suivant :

$$dx_t = f(t, x_t, s_t)dt + g(t, x_t, s_t)d\beta_t + k(t, x_t, s_t, u_t)dN_t \quad (2.15)$$

où $x_t \in \mathbb{R}^n$ et $s_t \in \mathbb{N}^m$ désignent l'état interne hybride qui engendre le processus. β_t et N_t sont des processus à accroissements indépendants, le premier continu (mouvement brownien) et le second un processus de comptage. u_t est la marque du processus de comptage dont la valeur n'influence le comportement du système qu'à l'occurrence d'un saut de N_t . Sa réalisation est indépendante de β_t et de N_t et distribuée selon la loi $\mathbb{P}_U(du)$. Les commutations de l'état discret S_t sont markoviennes et décrites par l'ensemble des fréquences de commutation λ_t^j et par l'ensemble des probabilités de transition Q_t^{ij} définies au paragraphe 2.3.2.

La discrétisation d'un tel processus consiste à en donner une représentation approchée sous la forme d'une équation récurrente de la forme :

$$x_{k+1}^e = f(k, x_k^e, s_k^e, w_k) \quad (2.16)$$

où $x_k^e = x_{k\Delta t}$ et $s_k^e = s_{k\Delta t}$ sont les état échantillonné à l'instant $t = k\Delta t$, respectivement continu et discret, et w_k un bruit blanc à temps discret conforme à la définition 55.

Si on intègre, entre deux instants d'échantillonnage, l'équation 2.13, on obtient :

$$x_{k+1}^e = x_k^e + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} f(t, x_t, s_t)dt + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} g(t, x_t, s_t)d\beta_t + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \int_U k(t, x_t, s_t, u)dN_t(du)$$

Cette expression est évidemment implicite du fait de la présence de x_t à l'intérieur des intégrales. Cependant, si la fréquence d'échantillonnage est "suffisamment" élevée vis à vis des constantes de temps du système, on peut considérer que l'approximation d'Euler est légitime. On obtient alors :

$$x_{k+1}^e \simeq x_k^e + f(k\Delta t, x_k^e)\Delta t + g(k\Delta t, x_k^e)\Delta\beta_k + \int_U k(k\Delta t, x_k^e, u)\Delta N_k(du) \quad (2.17)$$

²Ceci n'est théoriquement pas nécessaire. On peut faire toute la théorie du filtrage en considérant une évolution à temps continu de l'état du système observé à temps discret. Cependant, la complexité induite n'est pas, en général, justifiée.

où :

$$\begin{aligned}\Delta\beta_k &= \beta_{(k+1)\Delta t} - \beta_{k\Delta t} \\ \Delta N_k(du) &= N_{(k+1)\Delta t}(du) - N_{k\Delta t}(du)\end{aligned}$$

β_t étant un mouvement brownien, donc à accroissements indépendants, il est clair que :

$$\mathbb{P}(\Delta\beta_k | \Delta\beta_{k-1}, \dots, \Delta\beta_1) = \mathbb{P}(\Delta\beta_k)$$

Il en résulte que $\Delta\beta_k$ est un bruit blanc à temps discret. De plus, la distribution des incréments browniens étant gaussienne, le bruit blanc $\Delta\beta_k$ est distribué selon une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance $Q\Delta t$ où Q désigne la densité spectrale de puissance de β_t . A noter que c'est donc la puissance moyenne, et non l'amplitude moyenne, du bruit qui est proportionnelle à la période d'échantillonnage Δt .

Une difficulté apparaît dans la description de la partie ponctuelle du fait que l'accroissement $\Delta N_k(du)$ peut prendre théoriquement n'importe quelle valeur entière dans l'intervalle $[k\Delta t, (k+1)\Delta t]$. Entre deux échantillons, le processus de comptage marqué peut sauter plusieurs fois sur des marques différentes. Soit N_t le processus de comptage qui gouverne les sauts du processus, indépendamment de la valeur de la marque. En effet, d'après la définition de la loi de comptage 2.4 :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\Delta N_k = 0] &= e^{-\lambda\Delta t} \\ \mathbb{P}[\Delta N_k = 1] &= \lambda\Delta t e^{-\lambda\Delta t} \\ \mathbb{P}[\Delta N_k = 2] &= \frac{(\lambda\Delta t)^2}{2} e^{-\lambda\Delta t} \\ &\dots\end{aligned}$$

Cependant, si la fréquence d'échantillonnage est grande par rapport à la fréquence λ des sauts de dN_t , c'est à dire si $\lambda\Delta t \ll (\lambda\Delta t)^2$, on peut considérer que la probabilité $\mathbb{P}[\Delta N_k \geq 2]$ est négligeable par rapport aux autres événements. Le développement limité de l'exponentielle conduit alors à l'approximation du processus de comptage suivante :

$$\mathbb{P}[\Delta N_k = 1] \simeq \lambda\Delta t \quad (2.18a)$$

$$\mathbb{P}[\Delta N_k = 0] \simeq 1 - \lambda\Delta t \quad (2.18b)$$

Dans cette hypothèse, on peut récrire le modèle de prédiction 2.17 de la manière suivante :

$$x_{k+1}^e \simeq x_k^e + f(k\Delta t, x_k^e)\Delta t + g(k\Delta t, x_k^e)\Delta\beta_k + k(k\Delta t, x_k^e, u_k)\Delta N_k$$

où ΔN_k est un bruit blanc à temps discret à loi binomiale définie par 2.18, et où u_k est un bruit blanc à temps discret ayant la même loi que u .

Notons que les approximations que nous nous sommes autorisées nuisent peut à performance des estimateurs s'appuyant sur ces modèles. En effet, en pratique, les bruits sont suffisamment important pour intégrer de "petites" erreurs de modélisation.

Exemple 83. *Considérons un mobile se déplaçant dans un espace à une dimension, de position x_t , de vitesse v_t et soumis à une force extérieure f_t . Les équation de la dynamique newtonienne décrivent l'évolution de ce mobile par la formule suivante :*

$$m\dot{v}_t + \mu v_t = f_t$$

où μ est un coefficient de frottement visqueux et m la masse du mobile. Sous forme d'équation d'état, on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{x}_t &= v_t \\ \dot{v}_t &= -\frac{\mu}{m}v_t + f_t\end{aligned}$$

Soit Δt la période de discrétisation de ce processus. Supposons que la force extérieure soit modélisée comme un mouvement brownien de variance $Q\Delta t$. Le schéma d'intégration d'Euler donne alors :

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + v_k \Delta t \\v_{k+1} &= \left(1 - \frac{\mu \Delta t}{m}\right) v_k + f_k \Delta t \\f_{k+1} &= f_k + \Delta \beta_k\end{aligned}$$

où $\Delta \beta_k$ est un bruit blanc gaussien de variance $Q\Delta t$.

2.4.2. Echantillonnage d'un signal continu

Rappelons le théorème fondamental de Shannon concernant l'échantillonnage. Il s'agit de déterminer la fréquence d'échantillonnage minimale qui assure qu'il n'y a aucune perte d'information après échantillonnage.

Théorème 84. *Si le signal continu y_t est à spectre borné dans l'intervalle $[-F_{\max}, F_{\max}]$, la fréquence d'échantillonnage de ce signal doit être supérieure ou égale à $2F_{\max}$ pour garantir l'inversibilité de l'échantillonnage, c'est à dire pour assurer la possibilité de reconstruire le signal continu y_t à partir de ses échantillons.*

Preuve. Soit y_t^e le signal échantillonné à la période $T = 1/F_e$ du signal continu y_t . Celui-ci peut être représenté par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}y_t^e &= y_t \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{kT}(t) \\&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_{kT} \delta_{kT}(t)\end{aligned}$$

où $\delta_{kT}(t)$ désigne la mesure de Dirac de support kT . Par transformée de Fourier fréquentielle, on obtient :

$$X^e(f) = X(f) * \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{k}{T}}(f) \quad (2.19)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f - k/T) \quad (2.20)$$

où $*$ désigne l'opérateur de convolution. En effet, on peut montrer que la transformée du "peigne de Dirac" de pas T est un autre peigne de Dirac de pas $1/T$. Cela signifie que le spectre du signal échantillonné s'obtient en rendant périodique le spectre du signal d'origine à la période $1/T$. Le signal continu d'origine, de transformée de Fourier $X(f)$, peut donc être restitué s'il n'y a pas recouvrement quand celui-ci est rendu périodique sous la forme $X^e(f)$. Il suffit pour cela que la fréquence maximale F_{\max} de $X(f)$ soit plus petite que $2/T = 2F_e$. ■

Il ressort de ce théorème un principe pratique fondamental de l'échantillonnage : il est nécessaire de filtrer passe-bas le signal à une fréquence inférieure ou égale à la moitié de la fréquence F_e d'échantillonnage (filtre anti-repliement ou *anti-aliasing filter*). La restitution du signal d'origine est réalisée par filtrage passe-bas à $1/(2T)$ du signal échantillonné y_t^e .

2.4.3. Echantillonnage d'un signal bruité

Examinons à présent la conséquence de ce pré-filtrage sur un bruit blanc additif présent dans un signal continu à spectre borné par F_{\max} . Pour ce faire, considérons un bruit blanc gaussien $\dot{\beta}_t$ (à temps continu) qui subit le même traitement que celui décrit plus haut, c'est à dire filtrage passe-bas et échantillonnage.

Théorème 85. *Si $\dot{\beta}_t$ est bruit blanc gaussien à temps continu de densité spectrale de puissance N_0 , le processus w_t à temps discret obtenu après filtrage passe-bas à la fréquence $F_e/2$ et échantillonnage à la période $1/F_e$ est un bruit blanc gaussien de variance $N_0 F_e$.*

Preuve. Soit N_0 la densité spectrale de puissance de $\dot{\beta}_t$, constante sur tout l'axe des fréquences. Si on considère que le filtre passe-bas utilisé pour éviter le phénomène de repliement des spectres est idéal et de fréquence de coupure $F_e/2$, en vertu du théorème 90, la densité spectrale du bruit filtré sera constante (égale à N_0) sur l'intervalle $[-F_e/2, F_e/2]$ et nulle ailleurs :

$$S(f) = N_0 I(f \in [-F_e/2, F_e/2]) \quad (2.21)$$

où I désigne la fonction indicatrice d'intervalle. La densité spectrale de puissance du bruit filtré et échantillonné $w_k, k \in \mathbb{Z}$ sera donc, d'après le théorème 84 :

$$S_w(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} N_0 I((f - kF_e) \in [-F_e/2, F_e/2]) \quad (2.22)$$

qui est égale à la constante $N_0, \forall f \in \mathbb{R}$. Le bruit échantillonné est donc décorrélié. Sa variance est égale à l'intégrale de sa densité spectrale de puissance, soit ici $N_0 F_e$. De plus, comme le filtrage linéaire d'un processus gaussien est lui-même gaussien, on peut affirmer que le processus w_k est un bruit blanc gaussien. ■

Par ailleurs, l'autocorrélation de ce signal filtré, transformée de Fourier inverse de sa densité spectrale de puissance, est donnée par :

$$R_\tau = N_0 \frac{\sin(\pi F_e \tau)}{\pi \tau}$$

On vérifie bien que celle-ci est nulle sur tous les point supports $\tau = k/F_e, k \in \mathbb{Z}$ que sont les points d'échantillonnage.

Cela signifie que si l'observation d'un système est de la forme :

$$y_t = x_t + \dot{\beta}_t, t \in \mathbb{R}$$

où x_t est un signal continu à spectre borné par F_{\max} , et où $\dot{\beta}_t$ est un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance N_0 , après échantillonnage à la période T , le processus d'observation se représente par :

$$y_k^e = x_k^e + w_k$$

où $x_k^e = x_{kT}$ désigne le signal échantillonné et où w_k est un bruit blanc gaussien de variance $N_0 F_e$.

En pratique, on travaille rarement avec la densité spectrale de puissance N_0 . La pluparts des signaux traités sont des signaux à spectre considérés comme bornés dans un intervalle du type $[F_{\min}, F_{\max}]$. Dans ce cas, on évalue généralement la puissance P_b du bruit dans la bande $[F_{\min}, F_{\max}]$. Il est important de noter que si le filtrage passe-bas décrit ici a été remplacé par le filtrage passe-bande $[F_{\min}, F_{\max}]$, le bruit échantillonné, considéré comme blanc à l'origine, ne l'est plus. En effet, sa densité spectrale de puissance définie par 2.20 comporte des "trous"

(voir figure 2.5). Il est alors aisé de montrer que le bruit blanc équivalent a une variance égale à :

$$\sigma^2 = P_b \frac{F_e}{2(F_{\max} - F_{\min})} \quad (2.23)$$

En d'autres termes, si par le filtrage passe-bande $[F_{\min}, F_{\max}]$, la puissance du bruit résultant est diminuée, améliorant d'autant le rapport signal/bruit, ceci s'est fait au détriment de la blancheur du bruit, hypothèse très souvent nécessaire en traitement du signal. Insistons donc pour dire que la variance de bruit à prendre en compte n'est pas P mais σ^2 donnée par 2.23.

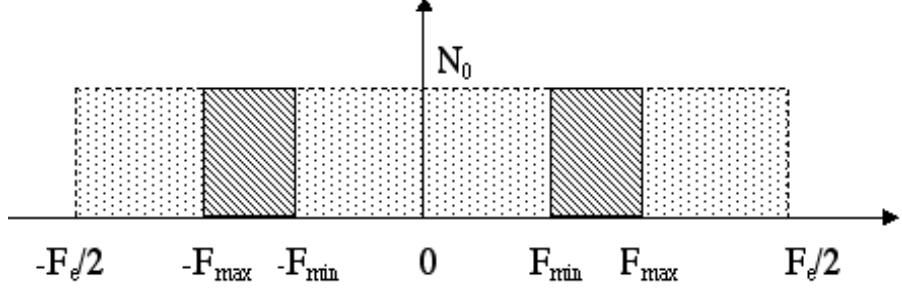


FIG. 2.5 – Densité spectrale de puissance du bruit échantillonné.

Il est important de remarquer que, en vertu de 2.23, la puissance du bruit équivalent après échantillonnage est proportionnelle à la fréquence d'échantillonnage. Par conséquent, quand on augmente la fréquence d'échantillonnage pour augmenter le nombre d'échantillons du signal et ainsi espérer améliorer la quantité d'informations acquises, ceci est compensé (exactement) par l'augmentation du bruit équivalent. En pratique, afin de limiter la charge de calcul dévouée au traitement du signal, on préfère utiliser la fréquence d'échantillonnage la plus faible possible qui assure néanmoins de ne pas perdre d'information sur le signal utile, soit $2F_{\max}$.

A. PREUVE DU THÉORÈME "PRODUIT DE GAUSSIENNES"

Avant toute chose, rappelons une identité algébrique utile.

Lemme 86. Si P et Q sont des matrices carrées inversibles de $\mathbb{R}^{n \times n}$, alors :

$$(FPF^T + Q)^{-1} = Q^{-1} - Q^{-1}F(F^TQ^{-1}F + P^{-1})^{-1}F^TQ^{-1} \quad (\text{A.1})$$

Preuve. Pour établir l'égalité A.1, il suffit de vérifier qu'en multipliant par $(FPF^T + Q)$ on obtient l'identité. En effet :

$$\begin{aligned} L &= (Q^{-1} - Q^{-1}F(F^TQ^{-1}F + P^{-1})^{-1}F^TQ^{-1})(FPF^T + Q) \\ &= I + Q^{-1}FPF^T - Q^{-1}F(F^TQ^{-1}F + P^{-1})^{-1}F^T \\ &\quad - Q^{-1}F(F^TQ^{-1}F + P^{-1})^{-1}F^TQ^{-1}FPF^T \\ &= I + Q^{-1}FPF^T - Q^{-1}F(F^TQ^{-1}F + P^{-1})^{-1}P^{-1}PF^T \\ &\quad - Q^{-1}F(F^TQ^{-1}F + P^{-1})^{-1}F^TQ^{-1}FPF^T \\ &= I + Q^{-1}FPF^T - Q^{-1}F(F^TQ^{-1}F + P^{-1})^{-1}(F^TQ^{-1}F + P^{-1})PF^T \\ &= I + Q^{-1}FPF^T - I + Q^{-1}FPF^T \\ &= I \end{aligned}$$

■

Par définition, on a :

$$\Gamma(x - Fy, Q)\Gamma(y - \mu, P) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|Q|}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|P|}} e^{-\frac{1}{2}((x-Fy)^TQ^{-1}(x-Fy) + (y-\mu)^TP^{-1}(y-\mu))}$$

Notons la forme quadratique argument de l'exponentielle

$$L = (x - Fy)^TQ^{-1}(x - Fy) + (y - \mu)^TP^{-1}(y - \mu)$$

L'idée est de factoriser L de manière à regrouper la somme des deux formes quadratiques en y en une seule. Le développement de L conduit à :

$$L = y^T(F^TQ^{-1}F + P^{-1})y - 2y^T(F^TQ^{-1}x + P^{-1}\mu) + x^TQ^{-1}x + \mu^TP^{-1}\mu$$

Notons :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= F^TQ^{-1}F + P^{-1} \\ \eta(x, \mu) &= A(F^TQ^{-1}x + P^{-1}\mu) \end{aligned}$$

L'expression de L peut alors être réécrite :

$$L = y^TA^{-1}y - 2y^TA^{-1}\eta(x, \mu) + x^TQ^{-1}x + \mu^TP^{-1}\mu$$

En écrivant cette expression comme le début d'un carré et en complétant, on obtient :

$$L = (y - \eta(x, \mu))^T A^{-1} (y - \eta(x)) + x^T Q^{-1} x + \mu^T P^{-1} \mu - \eta(x, \mu)^T A^{-1} \eta(x, \mu) \quad (\text{A.2a})$$

En utilisant l'identité :

$$A = (F^T Q^{-1} F + P^{-1})^{-1} = P - P F^T (F P F^T + Q)^{-1} F P$$

on obtient :

$$\eta(x, \mu) = P Q^{-1} x - P F^T (F P F^T + Q)^{-1} F P F^T Q^{-1} x + \mu - P F^T (F P F^T + Q)^{-1} F \mu$$

que l'on peut récrire, en ajoutant et retranchant Q :

$$\begin{aligned} \eta(x, \mu) &= P Q^{-1} x - P F^T (F P F^T + Q)^{-1} (F P F^T + Q) Q^{-1} x + P F^T (F P F^T + Q)^{-1} x \\ &\quad + \mu - P F^T (F P F^T + Q)^{-1} F \mu \end{aligned}$$

D'où :

$$\eta(x, \mu) = \mu + P F^T (F P F^T + Q)^{-1} (x - F \mu)$$

Notons à présent :

$$\begin{aligned} M &= x^T Q^{-1} x + \mu^T P^{-1} \mu - \eta(x, \mu)^T A^{-1} \eta(x, \mu) \\ R^{-1} &= (F P F^T + Q)^{-1} \end{aligned}$$

En utilisant l'identité :

$$Q^{-1} = R^{-1} + Q^{-1} F (F^T Q^{-1} F + P^{-1})^{-1} F^T Q^{-1}$$

on peut alors montrer en développant M que :

$$M = (x - F \mu)^T (F P F^T + Q)^{-1} (x - F \mu)$$

et que L s'écrit finalement :

$$L = (y - \eta(x, \mu))^T (F^T Q^{-1} F + P^{-1}) (y - \eta(x, \mu)) + (x - \mu)^T (F P F^T + Q)^{-1} (x - \mu)$$

Le produit des deux densité gaussienne peut donc être récrit :

$$\begin{aligned} \Gamma(x - F y, Q) \Gamma(y - \mu, P) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |P|}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |Q|}} e^{-\frac{1}{2} (y - \eta(x, \mu))^T (F^T Q^{-1} F + P^{-1}) (y - \eta(x, \mu))} \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{2} (x - \mu)^T (F P F^T + Q)^{-1} (x - \mu)} \end{aligned}$$

En modifiant l'écriture du terme de normalisation, le produit de gaussienne s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \Gamma(x - F y, P) \Gamma(y - \mu, Q) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |(F^T Q^{-1} F + P^{-1})^{-1}|}} e^{-\frac{1}{2} (y - \eta(x, \mu))^T (F^T Q^{-1} F + P^{-1}) (y - \eta(x, \mu))} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |F P F^T + Q|}} e^{-\frac{1}{2} (x - \mu)^T (F P F^T + Q)^{-1} (x - \mu)} \end{aligned}$$

qui est bien conforme à l'expression annoncée.

B. REPRÉSENTATION SPECTRALE DES PROCESSUS

B.1. Densité spectrale de puissance

Dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques linéaires, la transformée de Fourier (ou Laplace) joue un rôle fondamental dans la résolution des problèmes. En effet, les équations différentielles linéaires à coefficients constants (systèmes invariants au cours du temps) se ramènent à des équations algébriques à travers la notion de fonction de transfert. On montre ainsi que la transformée de Fourier de la sortie d'un système linéaire s'obtient en multipliant la transformée de Fourier de l'entrée par la fonction de transfert du système. Cette notion peut être étendue aux processus stochastiques stationnaires, c'est à dire tels que leurs propriétés statistiques sont invariantes dans le temps. Si on se restreint aux deux premiers moments du processus (moyenne et autocorrélation), la définition d'un processus stationnaire est la suivante :

Définition 87. *Un processus stochastique X_t est stationnaire au second ordre si : sa moyenne $\mathbb{E}[x_t]$ est indépendante de t ; son autocorrélation ne dépend que de s , $\mathbb{E}[x_t x_{t+s}] = R_{XX}(s)$.*

Cela signifie que toutes ses statistiques d'ordre inférieur ou égal à 2 sont indépendante de l'origine des temps choisie. Pour de tels processus, on peut définir l'analogue de la transformée de Fourier des signaux déterministes à travers ce qu'on appelle la densité spectrale de puissance :

Définition 88. *Soit X_t un processus stationnaire au second ordre. Sa densité spectrale de puissance est égale à la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation :*

$$S_{XX}(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi ft} R_{XX}(t) dt$$

Comme son nom l'indique, la densité spectrale de puissance représente la puissance moyenne du signal présent dans une bande fréquence $[f, f df]$. Celle-ci peut en effet être obtenue par le passage à la limite suivant :

Théorème 89. *Si le processus X_t est tel que $\int_{\mathbb{R}} |t R_{XX}(t)| dt < \infty$, alors :*

$$S_{XX}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x_t e^{-2i\pi ft} dt \right|^2 \right]$$

B.2. Transformations linéaires

Considérons un système dynamique linéaire stationnaire défini par sa réponse impulsionnelle $h(t)$. Sa fonction de transfert $H(f)$ est définie comme la transformée de Fourier de cette réponse impulsionnelle, soit :

$$H(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi ft} h(t) dt$$

Soit le processus stochastique X_t appliqué à l'entrée de ce système et Y_t le processus présent à sa sortie on a alors le théorème suivant :

Théorème 90. *La densité spectrale de puissance de la sortie d'un système linéaire stationnaire est égale à la densité spectrale de puissance de l'entrée multipliée par le module carré de la fonction de transfert du système linéaire :*

$$S_{YY}(f) = |H(f)|^2 S_{XX}(f)$$

Par définition de la réponse impulsionnelle, on a :

$$y_t = (h * x)_t = \int_{\mathbb{R}} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

L'autocorrélation de la sortie est alors définie par :

$$\begin{aligned} R_{YY}(s) &= \mathbb{E}[y_t y_{t+s}] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \int_{\mathbb{R}} h(\sigma) x(t + s - \sigma) d\sigma \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(\tau) h(\sigma) \mathbb{E}[x(t - \tau) x(t + s - \sigma)] d\tau d\sigma \end{aligned}$$

Si le processus X_t est stationnaire au second ordre, on a :

$$\mathbb{E}[x(t - \tau) x(t + s - \sigma)] = R_{XX}(s + \tau - \sigma)$$

D'où :

$$R_{YY}(s) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau) \left(\int_{\mathbb{R}} h(\sigma) R_{XX}(s + \tau - \sigma) d\sigma \right) d\tau$$

On reconnaît, dans l'intégrale en σ , la convolution entre h et R_{XX} prise au point $s + \tau$. Cette expression peut donc être réécrite :

$$R_{YY}(s) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau) (h * R_{XX})(s + \tau) d\tau$$

En réalisant le changement de variable $\tau' = -\tau$, on obtient :

$$R_{YY}(s) = \int_{\mathbb{R}} h(-\tau) (h * R_{XX})(s - \tau) d\tau$$

Si on note $\bar{h}(\tau) = h(-\tau)$, la fonction miroir de h , on observe que cette équation correspond à une nouvelle convolution :

$$R_{YY}(s) = \bar{h} * h * R_{XX}(s)$$

Par transformée de Fourier, on obtient la densité spectrale de puissance de la sortie en fonction de la densité spectrale de puissance.

Deuxième partie

Filtrage des Systèmes Markoviens

3. ESTIMATION ET DÉTECTION OPTIMALE

3.1. Espace d'état continu

3.1.1. Modèle d'estimation des processus continus

On considère un processus stochastique markovien "inconnu" $X_t \in \mathbb{R}^n$ représentant l'état interne d'un système dynamique à temps discret, tels que ceux décrits dans la section 2.3.3. Nous nous limiterons ici aux processus à temps discret car la plupart des traitements "avancés" du signal qui font l'objet de cet ouvrage sont réalisés aujourd'hui par des calculateurs numériques. Le modèle d'évolution du processus d'intérêt X_t peut être issu d'une modélisation du phénomène physique qui le gouverne (les lois de la mécanique, de la chimie, de l'électromagnétisme,...) ou d'un procédé d'identification. Le modèle markovien à temps discret peut alors être obtenu directement (dans le cas d'une identification) ou par discrétisation d'équation différentielles stochastiques telle que décrites dans la section 2.4.

Ce processus est observé par un autre processus $Y_t \in \mathbb{R}^m$ à temps discret, qualifié de "processus d'observation", lié au processus d'intérêt X_t et "sans mémoire". L'absence de mémoire du processus d'observation signifie qu'à chaque instant d'observation, l'information fournie est dépendante uniquement de l'état présent du système et non de son passé (ou futur) ni du propre passé (ou futur) du processus d'observation. Dans le cas contraire, il conviendrait de décrire la dynamique propre des capteurs afin d'immerger celle-ci dans le processus stochastique markovien X_t par augmentation d'état. Le modèle à temps discret de ce processus est généralement issu de l'échantillonnage des signaux issues de capteurs disposés sur le système.

Le modèle complet du processus d'intérêt X_t comporte donc les éléments suivants :

- Sa condition initiale représentée par la mesure de probabilité de X_0 définie sur \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{P}_{X_0}(dx_0)$$

- Son évolution probabiliste représentée par une équation récurrente du type :

$$x_t = f(t, x_{t-1}, w_t) \quad (3.1)$$

où $w_t \in \mathbb{R}^p$ est un bruit blanc, indépendant de l'état interne x_t et de mesure de probabilité connue :

$$\mathbb{P}_{W_t}(w_t)$$

L'expression de la dynamique 3.1 permet de déterminer la mesure de probabilité de transition :

$$\mathbb{P}_{X_t|X_{t-1}}(dx_t|x_{t-1}), \forall x_{t-1} \in \mathbb{R}^n$$

L'observation $y_t \in \mathbb{R}^m$ est alors généralement représentée par une fonction (statique) du type :

$$y_t = h(t, x_t, v_t)$$

où $v_t \in \mathbb{R}^q$ est un bruit blanc, indépendant de W_t^1 et X_t , de mesure de probabilité connue $\mathbb{P}(dv_t)$. La propriété de bruit blanc de la perturbation de l'observation permet de garantir que

¹A noter que cette indépendance n'est pas nécessaire à la résolution du problème.

le processus Y_t est sans mémoire. La donnée de cette mesure permet de définir la densité de probabilité conditionnelle aux observations, soit :

$$\mathbb{P}_{Y_t|X_t}(dy_t|x_t), \forall x_t \in \mathbb{R}^n$$

Notation 91. Par la suite, dans un souci d'allègement des écritures, nous omettrons le nom de la variable aléatoire dans l'expression des mesures de probabilité. Par conséquent, la notation $\mathbb{P}(dx|y)$ sera par exemple utilisée en lieu et place de $\mathbb{P}_{X|Y}(dx|y)$ quand il n'y aura pas d'ambiguïté. En d'autres termes, on indiquera les seules lettres minuscules (x, y) représentant les valeurs des variables aléatoires (X, Y) .

Exemple 92. Si, comme c'est souvent le cas en pratique, le bruit de mesure est de type additif gaussien de variance R , on définit :

$$y_t = h(x_t) + v_t$$

et la densité de probabilité conditionnelle des observations est une mesure à densité qui s'écrit :

$$p_{Y_t|X_t}(y_t|x_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|R|}} e^{-\frac{1}{2}(y_t-h(x_t))^T R^{-1}(y_t-h(x_t))}$$

Exemple 93. Poursuite RADAR.

3.1.2. Observabilité des systèmes dynamiques continus

La première question à laquelle il nous faut répondre concerne la possibilité d'estimer ou non l'état interne du système considéré pour que le problème d'estimation ait un sens. Il nous faut définir pour cela la notion d'observabilité des systèmes dynamiques. Cette notion s'énonce habituellement dans un cadre purement déterministe.

Observabilité déterministe

Soit le système dynamique défini par :

$$x_t = f(x_{t-1}, u_t) \tag{3.2a}$$

$$y_t = h(x_t) \tag{3.2b}$$

où $x_t \in \mathbb{R}^n$ est l'état interne du système, $u_t \in \mathbb{R}^p$ est l'entrée du système et $y_t \in \mathbb{R}^m$ la sortie. Dans ce cadre déterministe, le problème de l'observabilité de l'état x_t s'énonce comme la possibilité de déterminer celui-ci à partir de la donnée de la trajectoire de sortie $y_{0:t} \triangleq \{y_\tau, \tau = 0 \dots t\}$, la trajectoire d'entrée $u_{1:t} \triangleq \{u_\tau, \tau = 1 \dots t\}$ étant supposée connue. La dynamique du système étant connue, ainsi que la séquence des entrées appliquées, le problème de la détermination de x_t est équivalent à celui de déterminer la condition initiale x_0 , celle-ci étant liée à x_t par la relation suivante :

$$x_t = f_{u_t} \circ \dots \circ f_{u_1}(x_0)$$

où, par définition, $f_u(x) \triangleq f(x, u)$. L'observabilité du système 3.2 revient alors à déterminer si l'application qui associe à x_0 la trajectoire $\{y_\tau, \tau = 0 \dots t\}$ est inversible.

Définition 94. L'état x_0 du système dynamique non-linéaire 3.2 est (fortement) observable sur l'horizon $[0, t]$ si l'application :

$$x_0 \longrightarrow \{y_\tau = h \circ f_{u_\tau} \circ \dots \circ f_{u_1}(x_0), \forall \tau = 1 \dots t\} \tag{3.3}$$

est inversible pour toute trajectoire d'entrée $u_{1:t} = \{u_\tau, \tau = 1 \dots t\}$.

Remarque 95. Il existe dans la littérature des définitions de l'observabilité plus générales basées sur la notion d'indistingabilité [4] [5] [6]. En particulier, un état peut être "faiblement observable" sans que l'application introduite dans la définition 94 soit inversible. C'est pour cette raison que dans notre définition, on a précisé qu'il s'agit d'observabilité "forte", la seule à notre sens ayant un réel intérêt en pratique. Par exemple, si la fonction de sortie est du type $h(x) = (x)^2$, $x_0 = 0$ est un état observable puisque c'est la seule valeur qui donne une sortie identiquement nulle. En revanche, il n'est que faiblement observable car la fonction de sortie n'est pas inversible en ce point, $\partial h / \partial x = 0$ et deux états proches de $x_1 = \varepsilon$ et $x_2 = -\varepsilon$ donnant la même sortie sont indistingables.

Dans le cas général, les fonctions f et h étant non-linéaires, l'inversibilité de l'application 3.3 ne peut être assurée que localement. A titre d'exemple, considérons le système scalaire où $h(x) = (x)^2 - x$. $x_0 = 0$ n'est pas (globalement) observable puisque $x_1 = 1$ donne la même sortie identiquement nulle. $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$ sont indistingables. En revanche, au voisinage de 0, par exemple pour l'intervalle $] -1/2, 1/2[$, il est localement (fortement) observable car $h(x)$ est inversible sur cet intervalle.

Théorème 96. Pour que le système 3.2a 3.2b soit localement (fortement) observable en x sur l'horizon $[0, t]$, il suffit que quelque soit la trajectoire d'entrée $\{u_1, \dots, u_t\}$, le rang de la famille de vecteurs :

$$\mathcal{F} = \left\{ \left(\frac{\partial h(x)}{\partial x} \right)^T, \left(\frac{\partial (h \circ f_{u_1}(x))}{\partial x} \right)^T, \dots, \left(\frac{\partial (h \circ f_{u_t} \circ \dots \circ f_{u_1}(x))}{\partial x} \right)^T \right\} \quad (3.4)$$

soit égale à la dimension n du système.

Preuve. Rappelons que, par définition :

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} = \left[\frac{\partial h(x)}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial h(x)}{\partial x^n} \right]$$

où x^1, \dots, x^n sont les composantes du vecteur x . Les éléments de la famille \mathcal{F} sont donc les colonnes de la matrice jacobienne transposée de l'application :

$$y_{0:t} = \{y_\tau, \tau = 0 \dots t\} \longrightarrow \{h(x), h \circ f_{u_1}(x), \dots, h \circ f_{u_t} \circ \dots \circ f_{u_1}(x)\}$$

Si le rang de cette famille est plein, cela signifie que le jacobien de l'application est de rang plein et que cette application est localement inversible. ■

Intéressons nous au cas particulier des systèmes linéaires pour lesquels les équations dynamiques sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned} x_t &= Fx_{t-1} + Gu_t \\ y_t &= Hx_t \end{aligned}$$

où $x_t \in \mathbb{R}^n$ et $y_t \in \mathbb{R}^m$. Dans ce cas particulier, l'état à un instant t s'écrit en fonction de la condition initiale x_0 de la manière suivante :

$$x_t = (F)^t x_0 + \sum_{\tau=1}^t (F)^{(t-\tau)} Gu_\tau$$

et la famille de fonctions de la définition 94 s'écrit

$$h \circ f_{u_t} \circ \dots \circ f_{u_1}(x) = H (F)^t x_0 + \sum_{\tau=1}^t H (F)^{(t-\tau)} Gu_\tau$$

Si on calcule le jacobien du théorème 96 dont on doit tester le rang, on s'aperçoit que celui-ci ne dépend pas de la séquence d'entrée :

$$\mathcal{F} = \{H^T, F^T H^T, \dots, (F^T)^t H^T\}$$

De plus, en vertu du théorème de Calley-Hamilton, il suffit de tester les n premiers termes de cette famille car, si celle-ci est de rang plein, les termes suivants s'écrivent comme des combinaisons de ces n premiers terme, soit :

$$\mathcal{F} = \{H^T, F^T H^T, \dots, (F^T)^{n-1} H^T\} \quad (3.5)$$

L'observabilité déterministe d'un système linéaire ne dépend par conséquent pas de la séquence d'entrée appliquée.

Observabilité stochastique

Considérons à présent un système non-linéaire stochastique du type suivant :

$$x_t = f(x_{t-1}, w_t) \quad (3.6a)$$

$$y_t = h(x_t) + v_t \quad (3.6b)$$

Il n'est plus question ici de chercher à déterminer exactement l'état du système, les perturbations w_t et v_t n'étant pas mesurées. Dans ce contexte, il nous faut raisonner en termes de processus. Plus précisément, on peut dire que deux états initiaux x_0^1 et x_0^2 sont indistingables. s'ils engendrent le même processus d'observation $Y_{0:t}$. Un état x_0 sera alors dit observable si la donnée du processus $Y_{0:t}$ conditionné par la valeur initiale $X_0 = x_0$ est inversible. Or, il a été établi au paragraphe 2.1 qu'un tel processus était exhaustivement déterminé, par exemple, par la donnée de l'ensemble des mesures de probabilité $\{\mathbb{P}_{Y_{\tau_1} \dots Y_{\tau_k}}(dy_{\tau_1}, \dots, dy_{\tau_k} | x_0), \forall \tau_1, \dots, \tau_k = 0 \dots t\}$. Par ailleurs, dans le cadre non-linéaire, il peut s'avérer que l'état X_0 ne soit pas observable alors qu'une fonction $\psi(X_0)$ l'est. Nous adopterons donc comme définition de l'observabilité stochastique la formulation suivante :

Définition 97. La fonctionnelle $\psi(x_0)$ de l'état du système stochastique défini par ?? est stochastiquement observable sur l'horizon $[0, t]$ si l'application :

$$\psi(x_0) \longrightarrow \{\mathbb{P}_{Y_{\tau_1} \dots Y_{\tau_k}}(dy_{\tau_1}, \dots, dy_{\tau_k} | \psi(x_0)), \forall \tau_1, \dots, \tau_k = 0 \dots t\}$$

est inversible.

Comme il a été souligné au paragraphe 2.1, un processus stochastique est également déterminé par la donnée de l'ensemble de ses moments. Une définition équivalente de l'observabilité stochastique peut alors être donnée par :

Corollaire 98. La fonctionnelle $\psi(x_0)$ de l'état du système stochastique défini par 3.6 est stochastiquement observable sur l'horizon $[0, t]$ si l'application :

$$\psi(x_0) \longrightarrow \{\mathbb{E}[y_{\tau_1}^{i_1} \dots y_{\tau_k}^{i_k} | \psi(x_0)], \tau_1, \dots, \tau_k = 0 \dots t; i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1\}$$

est inversible.

Afin de ne pas alourdir cette écriture, nous avons supposé que la sortie du système était scalaire. Pour une sortie vectorielle, il suffit de considérer l'ensemble des puissances de chacune des composantes du vecteur de sortie.

Cas particulier des systèmes linéaires

Intéressons nous à nouveau au cas particulier des systèmes linéaires à bruit blancs gaussiens :

$$\begin{aligned}x_t &= Fx_{t-1} + Gw_t \\ y_t &= Hx_t + v_t\end{aligned}$$

où $x_t \in \mathbb{R}^n$, $y_t \in \mathbb{R}^m$ et w_t et v_t sont des bruits blancs gaussiens de matrices de covariances respectivement égales à Q et R . Comme dans le cas déterministe, la sortie du système à l'instant t s'écrit en fonction de la condition initiale x_0 de la manière suivante :

$$y_t = H(F)^t x_0 + \sum_{\tau=1}^t H(F)^{(t-\tau)} Gw_\tau + v_t \quad (3.7)$$

Comme v_t et l'ensemble $\{w_\tau, \tau = 1 \dots t\}$ sont des bruits blancs gaussiens indépendant, on constate que, conditionnellement à x_0 , y_t est distribué selon une loi gaussienne de moyenne $HF^t x_0$ et de variance égale à la somme des variances des éléments de la somme, soit

$$\sum_{\tau=1}^t H(F)^{(t-\tau)} GQG^T \left((F)^{(t-\tau)} \right)^T H^T$$

La densité de probabilité de l'observation, conditionnelle à la condition initiale s'écrit donc :

$$p_{Y_t|X_0}(y_t|x_0) = \Gamma \left(y_t - H(F)^t x_0, \sum_{\tau=1}^t H(F)^{(t-\tau)} GQG^T \left((F)^{(t-\tau)} \right)^T H^T \right)$$

Une condition suffisante pour que l'application de la définition ?? soit inversible est que le rang de la famille 3.5 soit plein, c'est à dire égal à la dimension n du système. En effet, si on se donne la famille de densités de probabilités $\{p_{Y_t|X_0}(y_t|x_0), \tau = 0 \dots t\}$, on peut en déterminer en particulier leurs moyennes :

$$\int_{\mathbb{R}^p} y_t p_{Y_t|X_0}(y_t|x_0) dy_t = H(F)^t x_0$$

Pour que l'application qui à x_0 associe $\{H(F)^\tau x_0, \tau = 0 \dots t\}$ soit inversible, il suffit donc que le rang de la famille 3.5 soit plein. En fait, cette condition est également nécessaire. En effet, si observe l'expression 3.7 de la sortie y_t du système, on constate que la dépendance en x_0 est déterministe et que, par conséquent, on peut directement calculer le jacobien de l'application $x_0 \longrightarrow \{y_0, \dots, y_t\}$ pour arriver à la même conclusion que dans le cas déterministe.

3.1.3. Critères d'estimation

Estimer "au mieux" le processus suppose la définition d'un critère qui évalue la qualité de l'estimation. Celui-ci peut en effet dépendre de l'objectif qu'on se donne. On distingue en général deux types de critère. Le premier critère cherche à minimiser l'erreur quadratique moyenne² commise au cours d'un ensemble d'estimations réalisées sur le système (filtrage à minimum de variance). Cela suppose naturellement qu'on puisse calculer une erreur quadratique moyenne et donc que l'espace d'état soit doté d'une topologie. Le second recherche, pour une expérience donnée, la trajectoire la plus probable parmi toutes les trajectoires possibles du système (filtrage à maximum de vraisemblance).

²On peut généraliser cette notion à une norme quelconque.

Filtrage à minimum de variance

Soit $X_t \in \mathbb{R}^n$ le processus stochastique d'intérêt. On cherche ici à minimiser la variance de l'erreur de filtrage. Ainsi, si \hat{x}_t désigne l'estimateur de l'état, celui-ci sera optimal en ce sens, s'il minimise la quantité :

$$\mathbb{E}[\|x_t - \hat{x}_t\|^2] \quad (3.8)$$

Partant de l'hypothèse que les seules informations dont on dispose sur le processus sont présentes dans le processus d'observation Y_t , l'estimateur sera construit comme une fonction de l'ensemble des observations $y_{0:t} = \{y_\tau, \tau \in [0, t]\}$.

Théorème 99. *L'estimateur à minimum de variance de l'état stochastique X_t observé par le processus Y_t coïncide avec l'espérance conditionnelle :*

$$\hat{x}_t = \mathbb{E}[x_t | y_{0:t}] \quad (3.9)$$

Preuve. Soit f^t un estimateur quelconque de X_t , fonction de tout le passé des observations $y_{0:t}$. Cherchons sous quelle condition on a :

$$\mathbb{E}[\|x_t - \hat{x}_t\|^2] \leq \mathbb{E}[\|x_t - f_t\|^2] \quad (3.10)$$

Cette inégalité peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\|x_t - \hat{x}_t\|^2 | y_{0:t}]] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[\|x_t - f_t\|^2 | y_{0:t}]] \quad (3.11)$$

où on a réalisé la moyenne sur toutes les trajectoires d'observation. Il est donc équivalent de chercher la condition sous laquelle on aura :

$$\mathbb{E}[\|x_t - \hat{x}_t\|^2 | y_{0:t}] \leq \mathbb{E}[\|x_t - f_t\|^2 | y_{0:t}] \quad (3.12)$$

En développant $x_t - f_t = x_t - \hat{x}_t + \hat{x}_t - f_t$, on obtient :

$$\mathbb{E}[\|x_t - \hat{x}_t\|^2 | y_{0:t}] \leq \mathbb{E}[\|x_t - \hat{x}_t\|^2 | y_{0:t}] + \mathbb{E}[\|f_t - \hat{x}_t\|^2 | y_{0:t}] + 2\mathbb{E}[\langle x_t - \hat{x}_t | f_t - \hat{x}_t \rangle | y_{0:t}] \quad (3.13)$$

où $\langle x | y \rangle$ désigne le produit scalaire de \mathbb{R}^n . Or, f_t et \hat{x}_t ne dépendent que des observations $y_{0:t}$. Par conséquent, on a :

$$\mathbb{E}[\langle x_t - \hat{x}_t | f_t - \hat{x}_t \rangle | y_{0:t}] = \langle \mathbb{E}[(x_t - \hat{x}_t) | y_{0:t}], f_t - \hat{x}_t \rangle \quad (3.14)$$

L'inégalité 4 sera donc vérifiée $\forall f_t$ si et seulement si :

$$\mathbb{E}[(x_t - \hat{x}_t) | y_{0:t}] = 0 \quad (3.15)$$

qui conduit immédiatement au résultat. ■

Un tel estimateur sera employé dans les situations où plusieurs expériences sont renouvelées et où l'on souhaite faire le moins d'erreurs possibles en moyenne sur l'ensemble de ces expériences. Il conduit au calcul de la mesure de probabilité conditionnelle (dite également *a posteriori*) $\mathbb{P}_{X_t|Y_{0:t}}(dx_t | y_{0:t})$.

Filtrage à maximum de vraisemblance

On cherche ici à déterminer la trajectoire de l'état x_t la plus vraisemblable aux vues des observations $y_{0:t}$. On cherche donc à construire la densité de probabilité conditionnelle de toute la trajectoire $x_{0:t} = \{x_\tau, \tau = 0 \dots t\}$, sachant les observations $y_{0:t}$, et à trouver la trajectoire pour laquelle cette probabilité est maximale, soit :

$$x_{0:t}^* = \underset{x_{0:t}}{ArgMax} \mathbb{P}_{X_{0:t}|Y_{0:t}}(dx_{0:t}|y_{0:t}) \quad (3.16)$$

On utilise en général quand une seule expérience est réalisée et où, par conséquent, il est important de maximiser ses chances de succès sur un coup. A noter que la trajectoire solution de la maximalisation est une trajectoire particulière possible du système, ce qui n'est pas le cas de l'estimateur à minimum de variance dont l'évolution se fait au gré des variations du bruit d'observation.

Filtrage à maximum de vraisemblance *a posteriori*

Il est important de noter que dans le cas non linéaire, la mesure de probabilité *a posteriori* peut être multi-modale (possède plusieurs extremum) et dans ce cas, la moyenne conditionnelle n'a plus beaucoup de sens car elle peut, par exemple, correspondre à une valeur de probabilité nulle. On peut dans ce cas envisager une situation intermédiaire entre filtrage à minimum de variance et filtrage à maximum de vraisemblance. Il s'agit de s'intéresser à la valeur de l'état qui maximise la probabilité conditionnelle utilisée par le filtre à minimum de variance :

$$\hat{x}_t = \underset{x_t}{ArgMax} \mathbb{P}_{X_t|Y_{0:t}}(dx_t|y_{0:t})$$

Cet estimateur, nommé "estimateur à maximum de vraisemblance *a posteriori*" est généralement utilisé quand on souhaite travailler avec la mesure $\mathbb{P}_{X_t|Y_{0:t}}(dx_t|y_{0:t})$ alors que celle-ci est multi-modale. A noter cependant que la trajectoire de l'estimateur obtenue peut très bien être une trajectoire impossible, de probabilité nulle *a priori*.

3.1.4. Filtrage à minimum de variance

– Etape de prédiction.

Le théorème de Chapman-Kolmogorov 54 s'étend directement dans ce contexte à la probabilité conditionnelle de la manière suivante :

$$\mathbb{P}_{X_t|Y_{0:t-1}}(dx_t|y_{0:t-1}) = \int_{x_{t-1} \in \mathbb{R}^n} \mathbb{P}_{X_t, X_{t-1}|Y_{0:t-1}}(dx_t, dx_{t-1}|y_{0:t-1})$$

Par définition de la probabilité conditionnelle, on a :

$$\mathbb{P}_{X_t, X_{t-1}|Y_{0:t-1}}(dx_t, dx_{t-1}|y_{0:t-1}) = \mathbb{P}_{X_t|X_{t-1}, Y_{0:t-1}}(dx_t|x_{t-1}, y_{0:t-1}) \mathbb{P}_{X_{t-1}|Y_{0:t-1}}(dx_{t-1}|y_{0:t-1}) \quad (3.17)$$

Or, l'état du système étant markovien, comme $Y_{0:t-1}$ ne concerne que les états antérieurs à $t-1$, la donnée de X_{t-1} suffit à déterminer complètement la distribution de l'état à l'instant t . On a donc :

$$\mathbb{P}_{X_t|X_{t-1}, Y_{0:t-1}}(dx_t|x_{t-1}, y_{0:t-1}) = \mathbb{P}_{X_t|X_{t-1}}(dx_t|x_{t-1}) \quad (3.18)$$

On obtient alors :

$$\mathbb{P}_{X_t|Y_{0:t-1}}(dx_t|y_{0:t-1}) = \int_{x_{t-1} \in \mathbb{R}^n} \mathbb{P}_{X_t|X_{t-1}}(dx_t|x_{t-1}) \mathbb{P}_{X_{t-1}|Y_{0:t-1}}(dx_{t-1}|y_{0:t-1}) \quad (3.19)$$

Remarque 100. Cette équation s'apparente à une convolution, opération connue pour être en général régularisante.

– Etape de correction :

En utilisant la règle de Bayes sur y_t , c'est à dire en séparant la dernière observation y_t de l'ensemble $y_{0:t}$ on obtient :

$$\mathbb{P}_{X_t|Y_{0:t}}(dx_t|y_{0:t}) = \frac{\mathbb{P}_{Y_t|X_t, Y_{0:t-1}}(dy_t|x_t, y_{0:t-1})\mathbb{P}_{X_t|Y_{0:t-1}}(dx_t|y_{0:t-1})}{\mathbb{P}_{Y_t|Y_{0:t-1}}(dy_t|y_{0:t-1})} \quad (3.20)$$

Le processus d'observation étant sans mémoire, seule la valeur de x_t détermine la loi de y_t . D'où :

$$\mathbb{P}_{Y_t|X_t, Y_{0:t-1}}(dy_t|x_t, y_{0:t-1}) = \mathbb{P}_{Y_t|X_t}(dy_t|x_t) \quad (3.21)$$

et par conséquent :

$$\mathbb{P}_{X_t|Y_{0:t}}(dx_t|y_{0:t}) = \frac{\mathbb{P}_{Y_t|X_t}(dy_t|x_t)\mathbb{P}_{X_t|Y_{0:t-1}}(dx_t|y_{0:t-1})}{\mathbb{P}_{Y_t|Y_{0:t-1}}(dy_t|y_{0:t-1})} \quad (3.22)$$

Le dénominateur de cette expression s'exprime à nouveau comme terme de normalisation :

$$\mathbb{P}_{Y_t|Y_{0:t-1}}(dy_t|y_{0:t-1}) = \int_{x_t \in \mathbb{R}^n} \mathbb{P}_{Y_t, X_t|Y_{0:t-1}}(dy_t, dx_t|y_{0:t-1}) \quad (3.23)$$

$$= \int_{x_t \in \mathbb{R}^n} \mathbb{P}_{Y_t|X_t}(dy_t|x_t)\mathbb{P}_{X_t|Y_{0:t-1}}(dx_t|y_{0:t-1}) \quad (3.24)$$

Finalement, l'étape de correction se traduit par :

$$\mathbb{P}_{X_t|Y_{0:t}}(dx_t|y_{0:t}) = \frac{\mathbb{P}_{Y_t|X_t}(dy_t|x_t)\mathbb{P}_{X_t|Y_{0:t-1}}(dx_t|y_{0:t-1})}{\int_{x_t \in \mathbb{R}^n} \mathbb{P}_{Y_t|X_t}(dy_t|x_t)\mathbb{P}_{X_t|Y_{0:t-1}}(dx_t|y_{0:t-1})} \quad (3.25)$$

On constate que cet opérateur multiplicatif a pour effet de renforcer la mesure de probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{X_t|Y_{0:t}}(dx_t|y_{0:t})$ aux points x_t pour lesquels l'observation y_t est cohérente avec cet état, c'est à dire pour les points tels $\mathbb{P}_{Y_t|X_t}(dy_t|x_t)$ a une valeur élevée, et inversement, de pénaliser les points peu vraisemblables vis-à-vis des mesures.

– Prédiction + Correction :

La conjonction des formules 3.19 et 3.25 nous conduit donc à la formule récurrente d'évolution de la probabilité conditionnelle suivante :

$$\mathbb{P}_{X_t|Y_{0:t}}(dx_t|y_{0:t}) = \frac{\mathbb{P}_{Y_t|X_t}(dy_t|x_t) \int_{x_{t-1} \in \mathbb{R}^n} \mathbb{P}_{X_t|X_{t-1}}(dx_t|x_{t-1})\mathbb{P}_{X_{t-1}|Y_{0:t-1}}(dx_{t-1}|y_{0:t-1})}{\int_{x_t \in \mathbb{R}^n} \mathbb{P}_{Y_t|X_t}(dy_t|x_t) \int_{x_{t-1} \in \mathbb{R}^n} \mathbb{P}_{X_t|X_{t-1}}(dx_t|x_{t-1})\mathbb{P}_{X_{t-1}|Y_{0:t-1}}(dx_{t-1}|y_{0:t-1})}$$

Si on itère cette équation de 0 jusqu'à t , on obtient l'expression globale de la probabilité conditionnelle suivante :

$$\mathbb{P}_{X_t|Y_{0:t}}(dx_t|y_{0:t}) = \frac{\mathbb{P}(dy_t|x_t) \int_{x_{t-1} \in \mathbb{R}^n} \dots \int_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \mathbb{P}(dy_{t-1}|x_{t-1}) \dots \mathbb{P}(dy_0|x_0) \mathbb{P}(dx_t|x_{t-1}) \dots \mathbb{P}(dx_1|x_0) \mathbb{P}(dx_0)}{\int_{x_t \in \mathbb{R}^n} \dots \int_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \mathbb{P}(dy_t|x_t) \dots \mathbb{P}(dy_0|x_0) \mathbb{P}(dx_t|x_{t-1}) \dots \mathbb{P}(dx_1|x_0) \mathbb{P}(dx_0)}$$

la sommation au numérateur étant faite sur l'ensemble $\{x_0, \dots, x_{t-1}\}$ et au dénominateur sur l'ensemble $\{x_0, \dots, x_t\}$.

Ainsi, partant de la mesure de probabilité initiale $\mathbb{P}(dx_0)$, il est possible, du moins en théorie, de construire récursivement la mesure probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(dx_t|y_{0:t})$ et, par conséquent, d'en déduire le filtre à minimum de variance de toute fonction $\phi(x)$ par :

$$\widehat{\phi(x_t)} = \mathbb{E}[\phi(x_t)|y_{0:t}] = \int_{x_t \in \mathbb{R}^n} \phi(x_t) \mathbb{P}_{X_t|Y_{0:t}}(dx_t|y_{0:t})$$

3.1.5. Filtrage à maximum de vraisemblance

L'estimation à maximum de vraisemblance d'un système stochastique tel que défini au paragraphe 3.1.1

$$x_t = f(x_{t-1}, w_t) \quad (3.26a)$$

$$y_t = h(x_t) + v_t \quad (3.26b)$$

consiste à déterminer, parmi toutes les trajectoires possibles de l'état $x_{0:t}$ celle qui est de probabilité maximale. Il s'agit donc théoriquement de déterminer

$$x_{0:t}^* = \underset{x_{0:t}}{ArgMax} \mathbb{P}_{X_{0:t}|Y_{0:t}}(dx_{0:t}|y_{0:t}) \quad (3.27)$$

La règle de Bayes permet de récrire cette mesure de probabilité selon :

$$x_{0:t}^* = \underset{x_{0:t}}{ArgMax} \frac{\mathbb{P}_{Y_{0:t}|X_{0:t}}(dy_{0:t}|x_{0:t}) \mathbb{P}_{X_{0:t}}(dx_{0:t})}{\mathbb{P}(dy_{0:t})}$$

Le dénominateur de cette expression étant indépendant de la variable à optimiser ($X_{0:t}$), il est équivalent de maximiser le numérateur, soit :

$$x_{0:t}^* = \underset{x_{0:t}}{ArgMax} \mathbb{P}_{Y_{0:t}|X_{0:t}}(dy_{0:t}|x_{0:t}) \mathbb{P}_{X_{0:t}}(dx_{0:t})$$

En réalité, cette mesure de probabilité trajectorielle est très souvent singulière comme on l'a souligné au paragraphe 2.3.3. Pour cette raison, on préfère travailler avec la probabilité trajectorielle des bruits. En effet, la donnée de l'événement "condition initiale" X_0 et de la trajectoire de bruits $W_{1:t}$ suffit à déterminer complètement la trajectoire de l'état $X_{0:t}$ par application de l'équation d'évolution 3.26a :

$$\{X_0, W_{1:t}\} \longrightarrow X_{0:t}$$

Par conséquent, la mesure de probabilité de l'événement $X_{0:t}$ coïncide avec la mesure de probabilité du couple $\{X_0, W_{1:t}\}$ et

$$\mathbb{P}_{X_{0:t}}(dx_{0:t}) = \mathbb{P}_{X_0}(dx_0) \mathbb{P}_{W_{1:t}}(dw_{1:t})$$

sous la contrainte $x_t = f(x_{t-1}, w_t)$.

Par ailleurs, W_t étant un bruit blanc, ses réalisations sont indépendantes et

$$\mathbb{P}_{W_{1:t}}(dw_{1:t}) = \prod_{\tau=1}^t \mathbb{P}_{W_t}(dw_t)$$

Le processus d'observation étant, par définition, sans mémoire, on a de même :

$$P_{Y_{0:t}|X_{0:t}}(dy_{0:t}|x_{0:t}) = \prod_{\tau=0}^t P_{Y_\tau|X_\tau}(dy_\tau|x_\tau)$$

En définitive, le problème d'estimation à maximum de vraisemblance du système ?? revient à rechercher :

$$x_{0:t}^* = \underset{x_{0:t}, w_{1:t}}{ArgMax} \mathbb{P}_{X_0}(dx_0) \prod_{\tau=1}^t \mathbb{P}_{W_\tau}(dw_\tau) \prod_{\tau=0}^t \mathbb{P}_{Y_\tau|X_\tau}(dy_\tau|x_\tau)$$

sous la contrainte $x_\tau = f(x_{\tau-1}, w_\tau), \forall \tau = 1 \dots t$.

Quand les mesures des bruits blancs W_t et V_t sont à densité, on préfère souvent travailler avec le logarithme Népérien de la densité de probabilité, ceci en référence au cas gaussien donnant lieu à des fonctionnelles quadratiques. Dans ce cas, le critère à optimiser s'écrit :

$$x_{0:t}^* = \underset{x_{0:t}, w_{1:t}}{\operatorname{ArgMax}} L_{X_0}(x_0) + \sum_{\tau=1}^t L_{W_\tau}(w_\tau) + \sum_{\tau=0}^t L_{Y_\tau|X_\tau}(y_\tau|x_\tau)$$

où $L_{X_0}(x_0) = \ln(p_{X_0}(x_0))$, $L_{W_\tau}(w_\tau) = \ln(p_{W_\tau}(w_\tau))$ et $L_{Y_\tau|X_\tau}(y_\tau|x_\tau) = \ln(p_{Y_\tau|X_\tau}(y_\tau|x_\tau))$.

3.2. Espace d'état discret

3.2.1. Modèles d'estimation des processus discrets

Pour les processus discrets, comme il a été établi au paragraphe 2.3.1, le processus d'intérêt S_t prend ses valeurs dans un espace fini $E = \{1, \dots, m\}$. Sa modélisation repose sur la donnée des éléments suivants :

Sa condition initiale définie par la donnée des probabilités pour chacune des valeurs possibles :

$$\mathbb{P}(S_0 = i), \forall i \in E$$

L'évolution temporelle du processus est décrite par l'ensemble (fini) de ses probabilités de transition :

$$\mathbb{P}(S_t = i | S_{t-1} = j), \forall i, j \in E$$

Si l'observation R_t du processus est elle-même discrète, à valeurs dans l'espace $F = \{1, \dots, p\}$, le processus d'observation sera alors défini par l'ensemble de probabilités conditionnelles suivant :

$$\mathbb{P}(R_t = i | S_t = j), \forall i \in F, \forall j \in E$$

Rappelons que le processus d'observation R_t est considéré comme étant sans mémoire, c'est à dire exhaustivement déterminé par la valeur courante de S_t :

$$\mathbb{P}(R_t = i | S_t = j, R_{0:t-1} = \{i_0 \dots i_{t-1}\}) = \mathbb{P}(R_t = i | S_t = j), \forall i \in F, \forall j \in E, \forall i_0 \dots i_{t-1} \in F$$

où, par définition, $R_{0:t} \triangleq \{R_0, \dots, R_t\}$.

En revanche, si le processus d'observation est à valeurs continues, $y_t \in \mathbb{R}^m$, celui-ci peut être défini à travers une équation statique du type :

$$y_t = h(t, s_t, v_t)$$

où v_t est la réalisation d'un bruit blanc, indépendant de S_t . Cette équation permet, dans ce contexte, de définir la mesure de probabilité de l'observation conditionnelle aux observations, soit :

$$\mathbb{P}_{Y_t|S_t}(dy_t | S_t = i), \forall i \in E$$

A nouveau, l'absence de mémoire du processus d'observation se traduit par :

$$\mathbb{P}_{Y_t|S_t, Y_{0:t-1}}(dy_t | S_t = i, Y_{0:t-1} = y_{0:t-1}) = \mathbb{P}_{Y_t|S_t}(dy_t | S_t = i), \forall i \in E \quad (3.28)$$

Notation 101. Comme pour le cas espace d'état continu, nous opterons pour une écriture simplifiée des probabilités. $\mathbb{P}(S_0 = i), \forall i \in E$ sera donc remplacé par $\mathbb{P}(s_0), \forall s_0 \in E$.

3.2.2. Critères d'estimations

Le filtrage à minimum de variance d'un tel processus n'a en soi pas de sens. En effet, il n'y a pas de topologie sur l'espace d'état E , et calculer des moyennes de symboles n'a aucune signification. Cependant, on peut néanmoins s'intéresser à la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(s_t|r_{0:t})$ (ou bien $\mathbb{P}(s_t|y_{0:t})$ dans le cas d'un processus d'observation continu) afin de calculer la valeur de s_t pour laquelle celle-ci prend sa valeur maximale, c'est à dire l'estimateur à maximum de vraisemblance *a posteriori* :

$$\hat{s}_{t|t} = \underset{s_t}{\operatorname{Arg\,max}} \mathbb{P}(s_t|r_{0:t})$$

L'estimateur le plus couramment utilisé dans ce cas est néanmoins l'estimateur à maximum de vraisemblance qui consiste à calculer la trajectoire de l'état $s_{0:t}$ de probabilité conditionnelle maximale, soit :

$$s_{0:t}^* = \operatorname{Arg\,max} \mathbb{P}(s_{0:t}|r_{0:t})$$

3.2.3. Filtrage à maximum de vraisemblance *a posteriori*

Il s'agit donc, connaissant la probabilité initiale de $\mathbb{P}(s_0)$, $\forall s_0 \in E$ et la suite d'observations $r_{0:t}$ (ou bien $y_{0:t}$) de construire $\mathbb{P}(s_t|y_{0:t})$, $\forall s_t = 1 \dots m$.

Le caractère markovien du modèle traité permet une écriture récursive de l'évolution de cette probabilité. Cette récursion s'obtient en deux étapes. La première, dite phase de prédiction, exploite le modèle dynamique de l'état pour en prédire sa distribution probabiliste au moment où une observation sera disponible. La deuxième phase, dite de correction, exploite la mesure réalisée sur le système pour modifier l'état précédemment prédit. La récursion recherchée concerne donc le schéma suivant :

$$\mathbb{P}(s_{t-1}|z_{0:t-1}) \xrightarrow{\text{prédiction}} \mathbb{P}(s_t|z_{0:t-1}) \xrightarrow{\text{correction}} \mathbb{P}(s_t|z_{0:t})$$

où z_t désigne r_t où y_t selon que l'observation est discrète ou continue.

– Etape de prédiction.

Il s'agit de décrire l'évolution de $\mathbb{P}(s_{t-1}|z_{0:t-1})$ vers $\mathbb{P}(s_t|z_{0:t-1})$. L'équation de transition 2.8 permet de décrire l'évolution d'un processus markovien en écrivant que $\mathbb{P}(s_t)$ peut toujours s'exprimer comme la marginale de $\mathbb{P}(s_t, s_{t-1}) = \mathbb{P}(s_t|s_{t-1}) \mathbb{P}(s_{t-1})$. Dans notre cas, ceci prend la forme suivante :

$$\mathbb{P}(s_t|z_{0:t-1}) = \sum_{s_{t-1}=1}^m \mathbb{P}(s_t|s_{t-1}, z_{0:t-1}) \mathbb{P}(s_{t-1}|z_{0:t-1})$$

Le processus S_t étant markovien, la donnée de S_{t-1} suffit à déterminer S_t et on a $\mathbb{P}(s_t|s_{t-1}, z_{0:t-1}) = \mathbb{P}(s_t|s_{t-1})$. Par conséquent :

$$\mathbb{P}(s_t|z_{0:t-1}) = \sum_{s_{t-1}=1}^m \mathbb{P}(s_t|s_{t-1}) \mathbb{P}(s_{t-1}|z_{0:t-1}) \quad (3.29)$$

– Etape de correction.

La correction exploite la liaison probabiliste présente entre l'état interne s_t et le processus d'observation r_t .

Dans le cas où le processus d'observation prend ses valeurs dans un espace fini $F = \{1, \dots, p\}$, cette relation est représentée par l'ensemble des probabilités :

$$\mathbb{P}(r_t|s_t), \forall r_t \in F, \forall s_t \in E$$

Pour faire apparaître la dernière observation du système, il suffit d'écrire :

$$\mathbb{P}(s_t|r_{0:t}) = \mathbb{P}(s_t|r_t, r_{0:t-1})$$

L'utilisation de la règle de Bayes permettant, en quelque sorte, d'inverser le conditionnement entre r_t et s_t , on peut alors écrire :

$$\mathbb{P}(s_t|r_{0:t}) = \frac{\mathbb{P}(r_t|s_t, r_{0:t-1}) \mathbb{P}(s_t|r_{0:t-1})}{\mathbb{P}(r_t|r_{0:t-1})}$$

Le processus r_t étant sans mémoire, conditionnellement à s_t , $\mathbb{P}(r_t|s_t, r_{0:t-1}) = \mathbb{P}(r_t|s_t)$ et on peut récrire cette expression sous la forme :

$$\mathbb{P}(s_t|r_{0:t}) = \frac{\mathbb{P}(r_t|s_t) \mathbb{P}(s_t|r_{0:t-1})}{\mathbb{P}(r_t|r_{0:t-1})}$$

Le dénominateur de cette expression est un terme de normalisation obtenu comme somme des termes du numérateur. En effet :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(r_t|r_{0:t-1}) &= \sum_{s_t=1}^m \mathbb{P}(r_t, s_t|r_{0:t-1}) \\ &= \sum_{s_t=1}^m \mathbb{P}(r_t|s_t) \mathbb{P}(s_t|r_{0:t-1}) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(s_t|r_{0:t}) = \frac{\mathbb{P}(r_t|s_t) \mathbb{P}(s_t|r_{0:t-1})}{\sum_{s_t=1}^m \mathbb{P}(r_t|s_t) \mathbb{P}(s_t|r_{0:t-1})} \quad (3.30)$$

Si l'observation appartient à un espace continu \mathbb{R}^p , son absence de mémoire (bruit d'observation blanc) permet d'écrire que sa mesure de probabilité vérifie :

$$\mathbb{P}(dy_t|s_t, y_{0:t-1}) = \mathbb{P}(dy_t|s_t)$$

et par conséquent :

$$\mathbb{P}(s_t|y_{0:t}) = \frac{\mathbb{P}(dy_t|s_t) \mathbb{P}(s_t|y_{0:t-1})}{\mathbb{P}(dy_t|y_{0:t-1})}$$

Comme précédemment, le dénominateur de cette expression est un terme de normalisation obtenu comme somme des termes du numérateur. En effet :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(dy_t|y_{0:t-1}) &= \sum_{s_t=1}^m \mathbb{P}(dy_t, s_t|y_{0:t-1}) \\ &= \sum_{s_t=1}^m \mathbb{P}(dy_t|s_t) \mathbb{P}(s_t|y_{0:t-1}) \end{aligned}$$

en utilisant 3.28 à nouveau. Ainsi :

$$\mathbb{P}(s_t|y_{0:t}) = \frac{\mathbb{P}(dy_t|s_t) \mathbb{P}(s_t|y_{0:t-1})}{\sum_{s_t=1}^m \mathbb{P}(dy_t|s_t) \mathbb{P}(s_t|y_{0:t-1})} \quad (3.31)$$

Notons

$$\hat{\mu}_{t|s} \triangleq [\mathbb{P}(s_t = 1|z_{0:s}), \dots, \mathbb{P}(s_t = m|z_{0:s})]^T$$

le vecteur dont chaque composante i représente la probabilité conditionnelle *a posteriori* que l'état à l'instant t soit égal à i , sachant les observations sur l'horizon $[0, s]$. Soit P_t la matrice de transition de $\mathbb{R}^{m \times m}$ définie par :

$$P_t^{ij} = \mathbb{P}(S_t = i | S_{t-1} = j), \forall i, j \in E$$

Pour l'observation discrète, soit $\{\Pi(r_t), r_t = 1 \dots m\}$, la famille de matrices diagonales de $\mathbb{R}^{m \times m}$ définies par :

$$\Pi(r_t) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbb{P}(r_t | S_t = 1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbb{P}(r_t | S_t = m) \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'un observation continue, il suffit de définir la matrice suivante :

$$\Pi(dy_t) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbb{P}(dy_t | S_t = 1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbb{P}(dy_t | S_t = m) \end{bmatrix}$$

L'algorithme d'estimation est donc structuré comme suit.

Algorithme d'estimation à maximum de vraisemblance *a posteriori* d'un processus discret à observation discrète

1. Initialisation

$$\hat{\mu}_{0|0} = [\mathbb{P}(S_0 = 1), \dots, \mathbb{P}(S_0 = m)]^T$$

2. Prédiction - L'expression 3.29 se traduit par :

$$\hat{\mu}_{t|t-1} = P_t \hat{\mu}_{t-1|t-1}$$

3. Correction

- Cas observation discrète : si on observe la valeur r_t , on calcule la matrice correspondante $\Pi(r_t)$. L'expression 3.30 conduit à :

$$\hat{\mu}_{t|t} = \frac{1}{|\Pi(r_t) \hat{\mu}_{t|t-1}|} \Pi(r_t) \hat{\mu}_{t|t-1}$$

où $|\mu|$ désigne le scalaire égal à la somme des composantes du vecteur μ .

- Cas observation continue : si on observe la valeur y_t , on calcule la matrice correspondante $\Pi(dy_t)$. L'expression 3.31 conduit à :

$$\hat{\mu}_{t|t} = \frac{1}{|\Pi(dy_t) \hat{\mu}_{t|t-1}|} \Pi(dy_t) \hat{\mu}_{t|t-1}$$

4. Retour en 2.

3.2.4. Filtrage à maximum de vraisemblance

Analysons dans un premier temps le cas d'une observation discrète. Le problème consiste à chercher sur un horizon $[0, t]$ la trajectoire $s_{0:t}$ qui soit de probabilité maximale conditionnellement à la séquence d'observations $r_{0:t}$:

$$s_{0:t}^* = \underset{s_{0:t}}{\operatorname{Arg\,max}} \mathbb{P}(s_{0:t}|r_{0:t})$$

En utilisant la règle de Bayes, cette probabilité conditionnelle peut s'écrire :

$$\mathbb{P}(s_{0:t}|r_{0:t}) = \frac{\mathbb{P}(r_{0:t}|s_{0:t}) \mathbb{P}(s_{0:t})}{\mathbb{P}(r_{0:t})}$$

Le dénominateur de cette expression étant indépendant de $s_{0:t}$, la trajectoire de probabilité maximale peut s'écrire de manière équivalente :

$$s_{0:t}^* = \underset{s_{0:t}}{\operatorname{Arg\,max}} \mathbb{P}(r_{0:t}|s_{0:t}) \mathbb{P}(s_{0:t})$$

Notons pour simplifier les écritures :

$$J(s_{0:t}, r_{0:t}) \triangleq \mathbb{P}(r_{0:t}|s_{0:t}) \mathbb{P}(s_{0:t})$$

Le caractère markovien de notre modèle permet de développer récursivement cette expression comme suit.

Proposition 102. *Le terme à maximiser $J(s_{0:t}, r_{0:t})$ peut se décomposer $\forall t \geq 0$ selon :*

$$J(s_{0:t}, r_{0:t}) = \mathbb{P}(r_t|s_t) \mathbb{P}(s_t|s_{t-1}) J(s_{0:t-1}, r_{0:t-1})$$

en prenant comme convention $\mathbb{P}(s_0|s_{-1}) \triangleq \mathbb{P}(s_0)$.

Preuve. En isolant s_t dans l'expression de $\mathbb{P}(s_{0:t})$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(s_{0:t}) &= \mathbb{P}(s_t, s_{0:t-1}) \\ &= \mathbb{P}(s_t|s_{0:t-1}) \mathbb{P}(s_{0:t-1}) \end{aligned}$$

en utilisant la définition de la probabilité conditionnelle. Le processus étant markovien, on a :

$$\mathbb{P}(s_t|s_{0:t-1}) = \mathbb{P}(s_t|s_{t-1})$$

D'où :

$$\mathbb{P}(s_{0:t}) = \mathbb{P}(s_t|s_{t-1}) \mathbb{P}(s_{0:t-1}) \tag{3.32}$$

De même, en isolant r_t de l'expression $\mathbb{P}(r_{0:t}|s_{0:t})$, on obtient :

$$\mathbb{P}(r_{0:t}|s_{0:t}) = \mathbb{P}(r_t|s_{0:t}, r_{0:t-1}) \mathbb{P}(r_{0:t-1}|s_{0:t})$$

Le processus r_t étant sans mémoire, on a nécessairement :

$$\mathbb{P}(r_t|s_{0:t}, r_{0:t-1}) = \mathbb{P}(r_t|s_t)$$

et :

$$\mathbb{P}(r_{0:t-1}|s_{0:t}) = \mathbb{P}(r_{0:t-1}|s_{0:t-1})$$

D'où :

$$\mathbb{P}(r_{0:t}|s_{0:t}) = \mathbb{P}(r_t|s_t) \mathbb{P}(r_{0:t-1}|s_{0:t-1}) \tag{3.33}$$

L'utilisation des équations 3.32 et 3.33 directement au résultat. ■

Le problème revient donc à calculer

$$s_{0:t}^* = \underset{s_{0:t}}{\operatorname{Arg\,max}} J(s_{0:t}, r_{0:t})$$

Pour ce faire, on considère à l'instant t et pour tout s_t , la valeur de $J(s_{0:t}, r_{0:t})$ qui maximise la sous-trajectoire $s_{0:t-1}$. On suppose donc détenir la trajectoire de probabilité maximale $s_{0:t-1}^*$ qui maximise la probabilité conditionnelle sur l'horizon $[0, t-1]$ et on laisse libre la dernière valeur s_t . On définit alors :

$$\forall s_t \in E, J^*(t, s_t, r_{0:t}) = \max_{s_{0:t-1}} J(s_{0:t}, r_{0:t})$$

Cette quantité correspond à la probabilité d'une trajectoire qui serait de probabilité maximale sur l'horizon $[0, t-1]$ et qui aboutirait en un point quelconque s_t .

Théorème 103. *La probabilité d'une trajectoire de probabilité maximale sur l'horizon $[0, t-1]$ aboutissant à l'instant t au point quelconque s_t s'obtient récursivement selon :*

$$\forall s_t \in E, J^*(t, s_t, r_{0:t}) = \mathbb{P}(r_t | s_t) \max_{s_{0:t-1}} (\mathbb{P}(s_t | s_{t-1}) J^*(t-1, s_{t-1}, r_{0:t-1}))$$

Preuve. D'après la proposition 102, on peut décomposer $J(s_{0:t}, r_{0:t}) = \mathbb{P}(r_t | s_t) \mathbb{P}(s_t | s_{t-1}) J(s_{0:t-1}, r_{0:t-1})$. D'où, par définition :

$$J^*(t, s_t, r_{0:t}) = \max_{s_{0:t-1}} (\mathbb{P}(r_t | s_t) \mathbb{P}(s_t | s_{t-1}) J^*(s_{0:t-1}, r_{0:t-1}))$$

Si on décompose la maximalisation selon $s_{0:t-2}$ et s_{t-1} , on peut écrire :

$$J^*(t, s_t, r_{0:t}) = \max_{s_{t-1}} \left(\mathbb{P}(r_t | s_t) \mathbb{P}(s_t | s_{t-1}) \left(\max_{s_{0:t-2}} J(s_{0:t-1}, r_{0:t-1}) \right) \right)$$

qui donne le résultat par définition de J^* et du fait que $\mathbb{P}(r_t | s_t)$ ne dépend pas de s_{t-1} . ■

L'algorithme de recherche de la trajectoire de probabilité maximale repose sur ce théorème. Il est clair que si pour tout s_t on connaît $J^*(t, s_t, r_{0:t})$ qui est maximisé sur l'horizon $[0, t-1]$, il suffit pour obtenir la valeur optimale de maximiser cette expression sur s_t , soit :

$$s_t^* = \underset{s_t}{\operatorname{Arg\,max}} J^*(t, s_t, r_{0:t})$$

Algorithme de Viterbi

1. Initialisation à $t = 0$

$$\forall s_0 \in E, J^*(0, s_0, r_0) = \mathbb{P}(r_0|s_0) \mathbb{P}(s_0)$$

2. Pour $\tau = 1 \dots t$, calcul récursif pour tout s_τ de la probabilité de la trajectoire de probabilité maximale sur l'horizon $[0, \tau - 1]$ aboutissant en s_τ

$$\forall s_\tau \in E, J^*(\tau, s_\tau, r_{0:\tau}) = \mathbb{P}(r_\tau|s_\tau) \max_{s_{0:\tau-1}} (\mathbb{P}(s_\tau|s_{\tau-1}) J^*(\tau - 1, s_{\tau-1}, r_{0:\tau-1}))$$

3. Estimation de l'état final

$$s_t^* = \underset{s_t}{\text{Arg max}} (J^*(t, s_t, r_{0:t}))$$

4. Eventuellement, calcul de la trajectoire de probabilité maximale à rebours :
pour $\tau = t \dots 1$

$$s_{\tau-1}^* = \underset{s_{\tau-1}}{\text{Arg max}} (\mathbb{P}(s_\tau^*|s_{\tau-1}) J^*(\tau - 1, s_{\tau-1}, r_{0:\tau-1}))$$

Remarque 104. On constate que sur un horizon $[0, \tau]$ donné, l'estimateur à maximum de vraisemblance s_τ^* de s_τ peut différer de la valeur estimée sur un horizon $[0, t]$ avec $t > \tau$.

Remarque 105. Il est nécessaire de calculer la valeur de $J^*(t, s_t, r_{0:t})$ pour tout $s_t \in E$, même pour des valeurs de s_t qui ne seront pas retenues comme valeur estimée. Dans cet approche, on ne peut conclure qu'après avoir examiné globalement l'ensemble des données d'observation.

Remarque 106. Cet algorithme est un algorithme de programmation dynamique en sens direct similaire à celui qui peut être utilisé pour calculer une trajectoire de commande optimale, problème dual. Dans notre contexte, la probabilité initiale joue le rôle du coût terminal utilisé en commande.

Dans le cas où l'observation est à valeur continue, il suffit de substituer la mesure de probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(dy_t|s_t)$ à la probabilité $\mathbb{P}(r_t|s_t)$ dans tout ce qui précède.

Exemple 107. Estimation d'un processus de comptage à observation gaussienne.

3.3. Espace d'état hybride et détection

3.3.1. Le problème de détection

Le processus hybrides, tels que ceux décrits au paragraphe 2.3.5 comportent à la fois une partie continue $X_t \in \mathbb{R}^n$ et une partie discrète $S_t \in \{1, \dots, m\}$. Quand la partie discrète est sans dynamique, on parle de problème de détection. Il s'agit en effet de déterminer, à partir d'un certain critère, la valeur (statique) prise par l'état discret S . A chaque valeur de s , on associe une hypothèse H_s . Pour conclure quant à l'hypothèse à retenir parmi les m possibles, on observe un certain processus Y_t dont le comportement dépend évidemment de l'hypothèse. On représente alors le système dynamique sous chaque hypothèse s par :

$$\begin{aligned} x_t &= f(x_t, s, w_t) \\ y_t &= h(x_t, s) + v_t \end{aligned}$$

où w_t et v_t sont des bruits blancs indépendants.

Exemple 108. En télécommunication numérique, le décodage de la transmission d'un bit de donnée peut être vu comme un choix entre deux hypothèses : H_0 pour la transmission d'un "zéro" et H_1 pour la transmission d'un "un".

Exemple 109. En détection RADAR, les hypothèses décriront la présence ou non d'une cible dans le faisceau de celui-ci.

3.3.2. Critères de détection

Comme pour l'estimation, il est nécessaire de définir un critère de décision pour choisir laquelle des hypothèses H_0 et H_1 , exclusives les unes des autres, est vraie. Dans ce contexte, quatre cas de décision sont possibles donnant lieu aux événements suivants :

1. H_0 est vraie et H_0 est choisie
2. H_0 est vraie et H_1 est choisie
3. H_1 est vraie et H_1 est choisie
4. H_1 est vraie et H_0 est choisie

Les situations 1 et 3 correspondent à des choix corrects alors que 2 et 4 correspondent à de mauvais choix. Soit y , à valeur dans l'espace Y , la variable d'observation du système qui va permettre de prendre la décision. On retient habituellement trois types de critères de décision.

Critère bayésien.

Dans cette approche, les événements relatifs aux décisions sont probabilisés. On associe à chacune des hypothèses H_0 et H_1 les probabilités *a priori* $\mathbb{P}(H_0)$ et $\mathbb{P}(H_1)$; on associe à chacun des événements 1, 2, 3, 4 un coût que nous noterons C_{ij} , coût correspondant à la décision "choisir H_i alors que H_j est vraie" et une probabilité P_{ij} d'occurrence de cet événement :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{choisir } H_i, H_j \text{ vraie}) &= \mathbb{P}(\text{choisir } H_i | H_j \text{ vraie}) \mathbb{P}(H_j \text{ vraie}) \\ &= P_{ij} \mathbb{P}(H_j)\end{aligned}$$

Avec ces notations, le coût moyen des décisions prises est égale à :

$$C = \sum_{i,j=0}^1 C_{ij} P_{ij} \mathbb{P}(H_j)$$

Introduisons une partition de l'ensemble de décision $Y = Y_0 \cup Y_1$ tel que :

- Si $y \in Y_0$, on prend la décision H_0
- Si $y \in Y_1$, on prend la décision H_1

Si on note $\mathbb{P}(y|H_i)$ la probabilité conditionnelle de y sachant que l'hypothèse H_i est vraie, la probabilité P_{ij} peut s'écrire :

$$\begin{aligned}P_{ij} &= \mathbb{P}(y \in Y_i | H_j) \\ &= \int_{Y_i} p(y|H_j) dy\end{aligned}$$

où $p(y|H_j)$ désigne la densité de probabilité conditionnelle de y sachant H_j . Le coût moyen C peut alors être récrit comme suit :

$$C = \sum_{i,j=0}^1 C_{ij} \mathbb{P}(H_j) \int_{Y_i} p(y|H_j) dy$$

En utilisant le fait que $Y = Y_0 \cup Y_1$, et qu'une probabilité est normalisée, on peut se ramener à une intégration sur seulement Y_0 :

$$\int_{Y_1} p(y|H_j)dy = 1 - \int_{Y_0} p(y|H_j)dy$$

On peut alors développer le coût moyen comme suit :

$$\begin{aligned} C = & C_{00}\mathbb{P}(H_0) \int_{Y_0} p(y|H_0)dy + C_{11}\mathbb{P}(H_1) \left(1 - \int_{Y_0} p(y|H_1)dy\right) \\ & + C_{01}\mathbb{P}(H_1) \int_{Y_0} p(y|H_1)dy + C_{10}\mathbb{P}(H_0) \left(1 - \int_{Y_0} p(y|H_0)dy\right) \end{aligned}$$

En regroupant les termes indépendants de y , on obtient :

$$\begin{aligned} C = & C_{11}\mathbb{P}(H_1) + C_{10}\mathbb{P}(H_0) \\ & + \int_{Y_0} ((C_{01} - C_{11}) p(y|H_1)\mathbb{P}(H_1) - (C_{10} - C_{00}) p(y|H_0)\mathbb{P}(H_0)) dy \end{aligned} \quad (3.34)$$

Le principe de la détection à critère bayésien est de minimiser le coût moyen par rapport à la valeur de la variable d'observation y . Pour ce faire, remarquons que si y a une valeur telle que l'intégrande intervenant dans 3.34 est positive, elle ne doit pas contribuer à augmenter le coût et il faut donc choisir Y_0 tel que, pour cette observation là, on ai $y \in Y_1$, ce qui revient à décider H_1 . La décision optimale de H_1 sera donc prise si :

$$(C_{01} - C_{11}) p(y|H_1)\mathbb{P}(H_1) - (C_{10} - C_{00}) p(y|H_0)\mathbb{P}(H_0) \geq 0 \quad (3.35)$$

Les hypothèses étant exclusives, la décision optimale de H_0 sera prise dans le cas contraire.

Il est plus que naturel de donner à une décision qui conduit à une erreur un coût plus important que celui attaché à un bon choix. Par conséquent, nécessairement $(C_{01} - C_{11}) > 0$ et $(C_{10} - C_{00}) > 0$. L'expression 3.35 peut être réécrite sous forme de rapport :

$$\Lambda(y) \triangleq \frac{p(y|H_1)}{p(y|H_0)} \geq \frac{(C_{10} - C_{00}) \mathbb{P}(H_0)}{(C_{01} - C_{11}) \mathbb{P}(H_1)} \implies H_1 \quad (3.36)$$

qui peut se résumer en $\Lambda(y) \geq \eta \implies H_1$ où $\Lambda(y)$ est appelé le rapport de vraisemblance et η le seuil de décision.

Critère bayésien à minimum d'erreur.

C'est le cas particulier où on associe à une erreur un coût unitaire ($C_{01} = C_{10} = 1$) et à une bonne décision un coût nul ($C_{00} = C_{11} = 0$). Dans ce cas, le test de détection prend la forme suivante :

$$\Lambda(y) = \frac{p(y|H_1)}{p(y|H_0)} \geq \frac{\mathbb{P}(H_0)}{\mathbb{P}(H_1)} \implies H_1 \quad (3.37)$$

En utilisant la règle de Bayes :

$$\mathbb{P}(H_i|y) = \frac{p(y|H_i)\mathbb{P}(H_i)}{p(y)}$$

on aboutit au test naturel suivant :

$$\mathbb{P}(H_1|y) \geq \mathbb{P}(H_0|y) \implies H_1$$

on choisit l'hypothèse pour laquelle la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(H_i|y)$ est maximale.

Critère de Neyman.

Dans certaines situations, il est difficile de connaître les probabilités *a priori* $P(H_0)$ et $P(H_1)$. On préfère alors travailler avec les probabilités de détection P_D (H_1 est choisi et H_1 est vraie) et de fausse alarme P_F (H_1 est choisi alors que H_0 est vraie). En reprenant la même forme de test que celle introduite dans le paragraphe 3.3.2, ces probabilités sont égales à :

$$\begin{aligned} P_D &= \int_{Y_1} p(y|H_1) dy \\ P_F &= \int_{Y_1} p(y|H_0) dy \end{aligned}$$

L'idée retenue ici consiste à chercher à maximiser la probabilité de détection P_D sous la contrainte que la probabilité de fausse alarme P_F soit inférieure à un certain seuil α fixé à l'avance. En utilisant les multiplicateurs de Lagrange à ce problème d'optimisation sous contrainte, on est ramené à la minimisation de :

$$C = (1 - P_D) + \lambda(P_F - \alpha)$$

qui se peut se récrire :

$$C = \lambda(1 - \alpha) + \int_{Y_0} (p(y|H_1) - \lambda p(y|H_0)) dy$$

Par un raisonnement analogue au précédent, on est amené au test du rapport de vraisemblance suivant :

$$\Lambda(y) = \frac{p(y|H_1)}{p(y|H_0)} \geq \eta \implies H_1 \quad (3.38)$$

Le seuil η est calculé de manière à satisfaire la contrainte $P_F \leq \alpha$. La fausse alarme correspondant à la détection ($\Lambda \geq \eta$) alors que H_0 est vraie, la réalisation de la contrainte s'exprime comme suit :

$$\int_{\eta}^{+\infty} p(\Lambda|H_0) d\Lambda = \alpha$$

Remarque 110. Quel que soit le critère retenu, la décision sur une hypothèse sera prise dans chaque cas en comparant le rapport de vraisemblance Λ à un certain seuil η .

Exemple 111. En détection RADAR, les spécifications de celui-ci sont généralement donnée en terme de probabilités de détection et de fausse alarme.

3.3.3. Cas des systèmes markoviens

A ce stade, la nature de la variable observée y , introduite dans le paragraphe 3.3.2, est *a priori* quelconque à valeur dans un espace Y très général. Pour aller plus loin, il est nécessaire de préciser la source de cette observation. Comme pour le problème d'estimation et pour des raisons analogues de calculabilité, nous nous limiterons aux processus markoviens décrits par des équations d'état stochastiques. Sous l'hypothèse H_1 , correspondant à la présence de l'objet à détecter, l'observation du système est la trajectoire de sortie d'un système dynamique markovien dont la représentation d'état est du type suivant :

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t, w_t) \\ s_t = h(x_t) \end{cases} \quad (3.39)$$

où w_t est un bruit blanc indépendant de x_t . Sous l'hypothèse H_0 , correspondant à l'absence de l'objet, l'observation n'est faite que de bruit. Par conséquent, la variable y introduite dans le paragraphe 3.3.2 est une trajectoire Y_0^T définie par, $\forall t = 0 \dots T$:

$$\begin{aligned} H_1 &\longrightarrow y_t = s_t + v_t \\ H_0 &\longrightarrow y_t = v_t \end{aligned}$$

où v_t est le bruit blanc d'observation de covariance R , indépendant de w_t .

Comme il a été mis en évidence plus haut, la prise de décision sur l'une ou l'autre des hypothèses est assujettie au calcul des probabilités des observations conditionnées par chacune des hypothèses, soit ici $p(y_{0:t}|H_1)$ et $p(y_{0:t}|H_0)$ et de former le rapport de vraisemblance $\Lambda(y_{0:t})$ qui sera comparé à un certain seuil défini à partir du critère de détection retenu.

Sous l'hypothèse H_0 , y_t est un bruit blanc, donc à réalisations indépendantes dans le temps. Si $p_V(v_t)$ désigne la densité de probabilité de ce bruit blanc, il est clair que :

$$p(y_{0:t}|H_0) = \prod_{\tau=0}^t p_V(y_\tau) \quad (3.40)$$

Le modèle 3.39 permet, comme en filtrage optimal, de définir la probabilité de transition sous l'hypothèses H_1 , c'est à dire $p(x_t|x_{t-1}, H_1)$ ainsi que la probabilité de la mesure $p(y_t|x_t, H_1)$. Le calcul de la probabilité conditionnelle $p(y_{0:t}|H_1)$ peut être réalisé récursivement grâce au caractère markovien du modèle. En effet, on peut décomposer celle-ci de la manière suivante :

$$p(y_{0:t}|H_1) = p(y_t, y_{0:t-1}|H_1) \quad (3.41)$$

$$= p(y_t|y_{0:t-1}, H_1)p(y_{0:t-1}|H_1) \quad (3.42)$$

Or, d'après l'équation 3.24, on a :

$$p(y_t|y_{0:t-1}, H_1) = \int_{\mathbb{R}^n} p(y_t|x_t, H_1)p(x_t|y_{0:t-1}, H_1)dx_t \quad (3.43)$$

Cette expression fait apparaître la nécessité de calculer la probabilité $p(x_t|y_{0:t-1}, H_1)$. Cette probabilité peut être calculée en faisant intervenir le modèle de prédiction du système comme dans l'équation 3.19 :

$$p(x_t|y_{0:t-1}, H_1) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x_t|x_{t-1}, H_1)p(x_{t-1}|y_{0:t-1}, H_1)dx_{t-1} \quad (3.44)$$

En regroupant les équations 3.43 et 3.44, on obtient :

$$p(y_t|y_{0:t-1}, H_1) = \int_{\mathbb{R}^n} p(y_t|x_t, H_1) \int_{\mathbb{R}^n} p(x_t|x_{t-1}, H_1)p(x_{t-1}|y_{0:t-1}, H_1)dx_{t-1}dx_t \quad (3.45)$$

Les équations 3.42 et 3.45 donnent bien un moyen de calcul récursif de la probabilité $p(y_{0:t}|H_1)$ nécessaire au test.

En résumé, le test d'hypothèse nécessite les 4 étapes suivantes :

1. Calcul récursif de la probabilité conditionnelle de filtrage sous l'hypothèses H_1 , soit $p(x_t|y_{0:t}, H_1)$ défini au paragraphe 3.1.4.
2. Calcul récursif par la formule 3.42 de la densité de probabilité de la trajectoire d'observation sous l'hypothèse H_1 , soit $p(y_{0:t}|H_1)$.
3. Calcul par la formule 3.40 de la densité de la densité de probabilité de la trajectoire d'observation sous l'hypothèse H_0 , soit $p(y_{0:t}|H_0)$.

4. Calcul du rapport de vraisemblance $\Lambda(y_{0:t})$, comparaison au seuil η et prise de décision définie par 3.36, 3.37 ou 3.38

Comme précédemment, il est en général difficile d'aller plus loin dans la description de la construction du test d'hypothèse en général sans ajouter de conditions supplémentaires. A nouveau, de part ses propriétés de fermeture par convolution et multiplication, l'ensemble des densités de probabilité gaussiennes jouent un rôle particulier justifiant une étude à part.

4. TECHNIQUES NUMÉRIQUES DE FILTRAGE

Comme on a pu le voir au chapitre 3.1, la mise en oeuvre pratique du filtrage des systèmes dynamiques markoviens nécessite la construction des probabilités conditionnelles suivantes :

- $p(s_t|y_{0:t})$, $s_t \in \{1, \dots, m\}$ pour les systèmes à espace d'état discret.
- $p(x_t|y_{0:t})$, $x_t \in \mathbb{R}^n$ pour les systèmes à espace d'état continu.
- $p(x_t, s_t|y_{0:t})$, $x_t \in \mathbb{R}^n$, $s_t \in \{1, \dots, m\}$ pour les systèmes hybrides.

à partir de la connaissance de :

- $p(s_0)$, $p(x_0)$ ou $p(x_0, s_0)$, la condition initiale de l'état probabiliste,
- $p(s_t|s_{t-1})$, $p(x_t|x_{t-1})$ ou $p(x_t, s_t|x_{t-1}, s_{t-1})$, la probabilité de transition,
- $p(y_t|s_t)$, $p(y_t|x_t)$ ou $p(y_t|x_t, s_t)$, la probabilité de l'observation.

4.1. Filtrage et détection optimal en dimension finie

4.1.1. Systèmes linéaires gaussiens : le filtre de Kalman

Un cas particulier très important est celui où les mesures de probabilité de transition $\mathbb{P}_{X_t|X_{t-1}}(dx_t|x_{t-1})$ et de l'observation $\mathbb{P}_{Y_t|X_t}(dy_t|x_t)$ sont des densités gaussiennes. En effet, on a vu au paragraphe 1.3 que l'ensemble des distribution gaussiennes est fermé par convolution et par multiplication. Ceci est dû à une propriété remarquable de la gaussienne. Sa fonction caractéristique, transformée de Fourier de la distribution, est aussi une gaussienne (non-normalisée). Comme la somme de formes quadratiques est aussi une forme quadratique, le produit de l'exponentielle de formes quadratiques est aussi une exponentielle de formes quadratiques. La structure gaussienne est donc conservée par multiplication et convolution (équivalente à une multiplication dans l'espace de la variable de Fourier). Ainsi, les seuls paramètres à calculer sont la moyenne et la matrice de covariance de la distribution conditionnelle $p_{X_t|Y_{0:t}}(x_t|y_{0:t})$.

Les systèmes dynamiques markoviens pour lesquels les probabilité de transition et d'observation sont gaussiennes sont les systèmes linéaires à bruits blancs gaussiens définis par :

$$x_t = F_t x_{t-1} + G_t w_t, x_t \in \mathbb{R}^n \quad (4.1a)$$

$$y_t = H_t x_t + v_t, y_t \in \mathbb{R}^m \quad (4.1b)$$

où les bruits w_t et v_t sont des bruits blancs gaussiens, indépendants et de covariances respectives Q_t et R_t et où la condition initiale de ce système x_0 est également de distribution gaussienne :

$$p_{X_0}(x_0) = \Gamma(x_0 - \bar{x}_0, P_0)$$

Rappelons que, par définition, $\Gamma(x, P) \triangleq 1/(\sqrt{(2\pi)^n |P|}) e^{-\frac{1}{2}x^T P^{-1}x}$, n étant la dimension de x , désigne ici la distribution gaussienne. Dans ce cas particulier, en appliquant le théorème 38 avec $A = G_t$, $X = w_t$ et $B = F_t x_{t-1}$, on peut déduire que la densité de probabilité de transition est gaussienne et égale à :

$$p_{X_t|X_{t-1}}(x_t|x_{t-1}) = \Gamma(x_t - F_t x_{t-1}, G_t Q G_t^T) \quad (4.2)$$

A noter que si la matrice $G_t Q G_t^T$ est singulière, ce qui est souvent le cas (nombre de perturbations inférieur à la dimension de l'état), cette définition a toujours un sens à condition de considérer ces équations au sens des distributions (voir paragraphe 1.3.2 du chapitre 1).

De même, la densité de probabilité de l'observation à bruit additif gaussien s'exprime selon :

$$p_{Y_t|X_t}(y_t|x_t) = \Gamma(y_t - H_t x_t, R) \quad (4.3)$$

On peut alors montrer que la densité de probabilité conditionnelle $p_{X_t|Y_{0:t}}(x_t|y_{0:t})$ est gaussienne.

Théorème 112. *Le filtre optimal à minimum de variance du système linéaire gaussien 4.1 initialisé gaussien a une densité de probabilité gaussienne dont les moyennes $\hat{x}_{t|t}$ et variances $P_{t|t}$ sont calculables récursivement par le système d'équations suivant :*

$$p_{X_t|Y_{0:t}}(x_t|y_{0:t}) = \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}, P_{t|t}) \quad (4.4)$$

$$\hat{x}_{t|t-1} = F_t \hat{x}_{t-1|t-1} \quad (4.5)$$

$$P_{t|t-1} = F_t P_{t-1|t-1} F_t^T + G_t Q_t G_t^T \quad (4.6)$$

$$K_t = P_{t|t-1} H_t^T (H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t)^{-1} \quad (4.7)$$

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + K_t (y_t - H_t \hat{x}_{t|t-1}) \quad (4.8)$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - P_{t|t-1} H_t^T (H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t)^{-1} H_t P_{t|t-1} \quad (4.9)$$

où, par définition, $\forall s \leq t$, $\hat{x}_{t|s} \triangleq \mathbb{E}[x_t|Y_0^s]$ et $P_{t|s} \triangleq \mathbb{E}[(x_t - \hat{x}_{t|s})(x_t - \hat{x}_{t|s})^T|Y_0^s]$.

Preuve. On montre ce résultat par récurrence. Supposons qu'à l'instant $t-1$, la densité de probabilité du filtre de x_t soit une gaussienne de moyenne $\hat{x}_{t-1|t-1}$ et de matrice de covariance $P_{t-1|t-1}$:

$$p_{X_{t-1}|Y_{0:t-1}}(x_{t-1}|y_{0:t-1}) = \Gamma(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}, P_{t-1|t-1})$$

L'étape de prédiction définie par l'équation de Chapman-Kolmogorov 3.19 s'écrit dans ce cas particulier :

$$p_{X_t|Y_{0:t-1}}(x_t|y_{0:t-1}) = \int_{\mathbb{R}^n} p_{X_t|X_{t-1}}(x_t|x_{t-1}) p_{X_{t-1}|Y_{0:t-1}}(x_{t-1}|y_{0:t-1}) dx_{t-1} \quad (4.10)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x_t - F_t x_{t-1}, G_t Q_t G_t^T) \Gamma(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}, P_{t-1|t-1}) dx_{t-1} \quad (4.11)$$

En appliquant le corollaire ?? avec $x_t \rightarrow x$, $F_t \rightarrow F$, $G_t Q_t G_t^T \rightarrow Q$, $x_{t-1} \rightarrow y$, $\hat{x}_{t-1|t-1} \rightarrow \mu$ et $P_{t-1|t-1} \rightarrow P$, cette pseudo-convolution est égale à :

$$p_{X_t|Y_{0:t-1}}(x_t|y_{0:t-1}) = \Gamma(x_t - F_t \hat{x}_{t-1|t-1}, F_t P_{t-1|t-1} F_t^T + G_t Q_t G_t^T)$$

Si on définit $\hat{x}_{t|t-1}$ conformément à 4.4 et $P_{t|t-1}$ comme en 4.5, cette expression s'écrit bien comme annoncé :

$$p_{X_t|Y_{0:t-1}}(x_t|y_{0:t-1}) = \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}, P_{t|t-1})$$

Concernant l'étape de correction, d'après 3.25, l'utilisation de la règle de Bayes donne :

$$p_{X_t|Y_{0:t}}(x_t|y_{0:t}) = \frac{p_{Y_t|X_t}(y_t|x_t) p_{X_t|Y_{0:t-1}}(x_t|y_{0:t-1})}{\int_{\mathbb{R}^n} p_{Y_t|X_t}(y_t|x_t) p_{X_t|Y_{0:t-1}}(x_t|y_{0:t-1}) dx_t} \quad (4.12)$$

$$= \frac{\Gamma(y_t - H_t x_t, R) \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}, P_{t|t-1})}{\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y_t - H_t x_t, R) \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}, P_{t|t-1}) dx_t} \quad (4.13)$$

D'après le théorème 40 avec $y_t \rightarrow x$, $H_t \rightarrow F$, $R \rightarrow Q$, $x_t \rightarrow y$, $\hat{x}_{t|t-1} \rightarrow \mu$ et $P_{t|t-1} \rightarrow P$, ce produit de gaussiennes peut être réécrit de la manière suivante :

$$\Gamma(y_t - H_t x_t, R) \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}, P_{t|t-1}) = \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}, (H_t^T R^{-1} H_t + P_{t|t-1}^{-1})^{-1}) \Gamma(y_t - H_t \hat{x}_{t|t-1}, H_t P_{t|t-1}^T H_t + R)$$

où $\hat{x}_{t|t}$ est défini par les équations 4.6 et 4.7. L'utilisation du lemme 86 permet de réécrire la matrice de covariance de cette gaussienne comme suit :

$$\begin{aligned} P_{t|t} &\triangleq (H_t^T R^{-1} F + P_{t|t-1}^{-1})^{-1} \\ &= P_{t|t-1} - P_{t|t-1} H_t^T (H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t)^{-1} H_t P_{t|t-1} \end{aligned}$$

qui correspond bien à l'équation 4.8 annoncée. Enfin, le terme de normalisation de l'équation 4.13 est calculé comme suit :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y_t - H_t x_t, R) \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}, P_{t|t-1}) dx_t = \Gamma(y_t - H_t \hat{x}_{t|t-1}, H_t P_{t|t-1} H_t^T + R) \quad (4.14)$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}, (H_t^T R^{-1} H_t + P_{t|t-1}^{-1})^{-1}) dx_t \quad (4.15)$$

$$= \Gamma(y_t - H_t \hat{x}_{t|t-1}, H_t P_{t|t-1} H_t^T + R) \quad (4.16)$$

l'intégrale en x_t étant égal à la norme (unitaire) de la densité gaussienne. Reporté dans 4.13, on obtient finalement :

$$p_{X_t|Y_{0:t}}(x_t|y_{0:t}) = \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}, P_{t|t-1} - P_{t|t-1} H_t^T (H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t)^{-1} H_t P_{t|t-1})$$

■

Ainsi, pour construire l'estimateur optimal d'un système linéaire gaussien, il suffit de calculer récursivement $\hat{x}_{t|t}$, $P_{t|t}$ à partir des équations 4.5 à 4.9, celles-ci étant initialisées avec les valeurs \bar{x}_0 et P_0 respectivement.

Filtre de Kalman

1. Initialisation :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{0|0} &= \mathbb{E}[x_0] = \bar{x}_0 \\ P_{0|0} &= \mathbb{E}[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T] = P_0 \end{aligned}$$

2. Prédiction :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t|t-1} &= F_t \hat{x}_{t-1|t-1} \\ P_{t|t-1} &= F_t P_{t-1|t-1} F_t^T + G_t Q_t G_t^T \end{aligned}$$

3. Correction :

$$\begin{aligned} K_t &= P_{t|t-1} H_t^T (H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t)^{-1} \\ \hat{x}_{t|t} &= \hat{x}_{t|t-1} + K_t (y_t - H_t \hat{x}_{t|t-1}) \\ P_{t|t} &= P_{t|t-1} - P_{t|t-1} H_t^T (H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t)^{-1} H_t P_{t|t-1} \end{aligned}$$

4. Retour en 2.

Remarque 113. Si la matrice R est singulière, cela signifie que certaines sorties sont non bruitées. Dans ce cas, on est face à un problème singulier qui n'aurait pas de solution par la technique développée ici. Pour contourner cette difficulté, il suffit en général de décaler virtuellement les instants d'observation en définissant une nouvelle sortie définie par :

$$z_t = y_{t+1} = H_t F_t x_t + H_t G_t w_t + v_t$$

Pour un tel système, la matrice de covariance des bruits devient

$$H_t G_t Q_t G_t^T H_t^T + R_t$$

qui peut ne plus être singulière. Si ce n'était pas le cas, il suffirait de décaler à nouveau l'instant d'observation jusqu'à obtenir une matrice de rang plein. Il est important de noter que dans ce cas, le bruit dynamique n'est plus indépendant du bruit d'observation et l'algorithme de filtrage présenté dans le théorème 112 n'est plus applicable en l'état et demande quelques modifications.

Remarque 114. La matrice de covariance du filtre de Kalman est indépendante des observations :

$$P_{t|t} \triangleq \mathbb{E}[(x_t - \hat{x}_{t|t})^T (x_t - \hat{x}_{t|t}) | y_{0:t}] = \mathbb{E}[(x_t - \hat{x}_{t|t})^T (x_t - \hat{x}_{t|t})]$$

Par conséquent l'erreur moyenne de filtrage et les gains de correction K_t peuvent être calculés *a priori* hors ligne et sont indépendantes de la réalisation du signal système.

Remarque 115. Si la dynamique du système est nulle ($Q = 0$), c'est le cas par exemple de l'estimation de paramètres fixes, on constate que le gain de correction tend systématiquement vers 0 ainsi que la variance de l'erreur de filtrage. Cela signifie que quand on estime des quantités fixes, au bout d'un certain temps, les nouvelles observations ne sont plus nécessaires à la correction. Ceci procure au filtre de Kalman un avantage décisif par rapport à son ancêtre, le filtre de Wiener, qui ne traite lui que le cas stationnaire ce qui le rend incapable d'acquérir des valeurs de paramètres fixes. Ce qui fait la richesse du filtre de Kalman, même dans le cas où $Q \neq 0$, c'est de pouvoir traiter optimalement les phases d'acquisition et de poursuite.

Remarque 116. Si on analyse le comportement du filtre de Kalman dans ses phases de prédiction et de correction, on peut observer qu'au moment de la prédiction, la variance de l'erreur de prédiction est augmentée proportionnellement à la variance des bruits de dynamique à travers le terme GQG^T dans l'équation 4.6. En revanche, si le système est stable ($\|F\| < 1$) celle-là a tendance à diminuer. Ceci est tout à fait naturel du fait qu'au cours de la prédiction, l'estimateur fait l'hypothèse d'un bruit nul (équation 4.5), cette opération est faite en "aveugle" et donc la prédiction a tendance à augmenter l'erreur d'estimation. Au moment de la correction, la valeur prédite par l'estimateur est corrigée proportionnellement à la différence qu'il y a entre la valeur de la sortie prédite ($\mathbb{E}[y_t | y_{0:t-1}] = H\hat{x}_{t|t-1}$) et la valeur observée. Par ailleurs, si on analyse l'expression du gain de correction (équation 4.8), on constate que celui-ci est proportionnel à l'erreur de prédiction. En effet, plus l'erreur est élevée, plus il est nécessaire de corriger l'estimation pour rejoindre rapidement une valeur correcte. Inversement, plus la variance du bruit d'observation R est élevée, plus le gain de correction est faible, exprimant la nécessité d'être prudent à la prise en compte d'une observation réputée non fiable car très bruitée. Une conséquence de la correction est de diminuer la variance de l'erreur de filtrage, le terme additif de l'équation 4.9) étant toujours défini négatif. Ainsi, la succession des phases de prédiction/correction ont des effets contraires, l'une augmente l'erreur alors que l'autre la diminue. Pour des systèmes stationnaires, dont les matrices F , G , et H indépendantes du temps, la variance de l'erreur de filtrage tend vers une valeur limite qui est par conséquent proportionnelle au rapport Q/R .

Exemple 117. Poursuite d'une sinusoïde de fréquence connue et de phase inconnue.

4.1.2. Filtres de Kalman en parallèle

Il est aisé d'étendre ce résultat au cas où la condition initiale n'est pas gaussienne mais définie comme une somme pondérées de densités gaussiennes :

$$p_{X_0}(x_0) = \sum_{k=1}^N \rho_0^k \Gamma(x_0 - \bar{x}_0^k, P_0^k)$$

où $\sum_{k=1}^N \rho_0^k = 1$. On peut alors montrer que dans ce cas, la densité de probabilité *a posteriori* peut s'écrire :

$$p_{X_t|Y_{0:t}}(x_t|y_{0:t}) = \sum_{k=1}^N \rho_t^k \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}^k, P_{t|t}^k) \quad (4.17)$$

où $\hat{x}_{t|t}^k$ et $P_{t|t}^k$, $\forall k = 1 \dots N$ sont obtenus à partir de N filtres de Kalman en parallèle initialisés chacun avec les valeurs \hat{x}_0^k et P_0^k . Les pondérations ρ_t^k dépendent de la vraisemblance de chacun des estimateurs vis-à-vis des observations. Pour s'en convaincre, il suffit de raisonner à nouveau par récurrence. L'égalité 4.17 est vraie initialement. Supposons qu'elle soit vraie à l'instant $t-1$. Si la densité de probabilité de transition est gaussienne, conformément à 4.2, la prédiction s'obtient comme suit :

$$p_{X_t|Y_{0:t-1}}(x_t|y_{0:t-1}) = \sum_{k=1}^N \rho_{t-1}^k \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x_t - F_t x_{t-1}, G_t Q_t G_t^T) \Gamma(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}^k, P_{t-1|t-1}^k) dx_{t-1} \quad (4.18)$$

En appliquant le corollaire ?? sur chacun des termes de la somme, on obtient aisément :

$$p_{X_t|Y_{0:t-1}}(x_t|y_{0:t-1}) = \sum_{k=1}^N \rho_{t-1}^k \Gamma(x_t - F_t \hat{x}_{t-1|t-1}^k, F_t P_{t-1|t-1}^k F_t^T + G_t Q_t G_t^T)$$

Ainsi, si on définit le k -ième prédicteur de Kalman comme suit :

$$\forall k = 1 \dots N, \begin{cases} \hat{x}_{t|t-1}^k = F_t \hat{x}_{t-1|t-1}^k \\ P_{t|t-1}^k = F_t P_{t-1|t-1}^k F_t^T + G_t Q_t G_t^T \end{cases}$$

on obtient à nouveau une description de la densité de probabilité comme somme de densités gaussiennes :

$$p_{X_t|Y_{0:t-1}}(x_t|y_{0:t-1}) = \sum_{k=1}^N \rho_{t-1}^k \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}^k, P_{t|t-1}^k)$$

Si la densité de probabilité conditionnelle de l'observation est gaussienne (4.3), la correction obtenue par application de la règle de Bayes conduit à :

$$p_{X_t|Y_{0:t}}(x_t|y_{0:t}) \propto \sum_{k=1}^N \rho_{t-1}^k \Gamma(y_t - H_t x_t, R) \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}^k, P_{t|t-1}^k) \quad (4.19)$$

où le symbole \propto signifie "proportionnel à". Cette expression peut être développée en appliquant le théorème 40 à chaque terme de la somme :

$$p_{X_t|Y_{0:t}}(x_t|y_{0:t}) \propto \sum_{k=1}^N \rho_{t-1}^k \Gamma(y_t - H_t \hat{x}_{t|t-1}^k, H_t^T P_{t|t-1}^k H_t + R) \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}^k, P_{t|t}^k)$$

où :

$$\begin{aligned} K_t^k &= P_{t|t-1}^k H_t^T (H_t P_{t|t-1}^k H_t^T + R_t)^{-1} \\ \hat{x}_{t|t}^k &= \hat{x}_{t|t-1}^k + K_t^k (y_t - H_t \hat{x}_{t|t-1}^k) \\ P_{t|t}^k &= P_{t|t-1}^k - P_{t|t-1}^k H_t^T (H_t P_{t|t-1}^k H_t^T + R_t)^{-1} H_t P_{t|t-1}^k \end{aligned}$$

Le terme de normalisation s'obtient comme suit :

$$\int p_{X_t|Y_{0:t}}(x_t|y_{0:t}) dx_t = \sum_{k=1}^N \rho_{t-1}^k \Gamma(y_t - H_t \hat{x}_{t|t-1}^k, H_t^T P_{t|t-1}^k H_t + R)$$

Finalement, la densité de probabilité conditionnelle s'écrit à l'instant t :

$$p_{X_t|Y_{0:t}}(x_t|y_{0:t}) = \sum_{k=1}^N \rho_t^k \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}^k, P_{t|t}^k)$$

où les termes de pondération sont mis à jour conformément à :

$$\rho_t^k = \frac{\rho_{t-1}^k \Gamma(y_t - H_t \hat{x}_{t|t-1}^k, H_t^T P_{t|t-1}^k H_t + R)}{\sum_{k=1}^N \rho_{t-1}^k \Gamma(y_t - H_t \hat{x}_{t|t-1}^k, H_t^T P_{t|t-1}^k H_t + R)}$$

On observe que ces pondérations sont proportionnelles aux vraisemblances de chacun des filtres de Kalman en parallèle.

L'estimateur optimal à minimum de variance s'obtient alors par l'expression suivante :

$$\hat{x}_{t|t} = \sum_{k=1}^N \rho_t^k \hat{x}_{t|t}^k$$

alors que sa variance s'obtient par :

$$\begin{aligned} P_{t|t} &= \sum_{k=1}^N \rho_t^k \int (x_t - \hat{x}_{t|t}) (x_t - \hat{x}_{t|t})^T \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}^k, P_{t|t}^k) \\ &= \sum_{k=1}^N \rho_t^k \left(P_{t|t}^k + \hat{x}_{t|t}^k (\hat{x}_{t|t}^k)^T \right) - \hat{x}_{t|t} (\hat{x}_{t|t})^T \end{aligned}$$

4.1.3. Détection de signaux gaussiens.

Intéressons nous au cas particulier où, sous l'hypothèse H_1 , le signal d'observation est la sortie d'un système dynamique linéaire gaussien :

$$\begin{cases} x_{t+1} = F_t x_t + G_t w_t \\ s_t = H_t x_t \end{cases} \quad (4.20)$$

où w_t est un bruit blanc gaussien de covariance Q . Sous l'hypothèse H_1 , l'observation du système a l'expression suivante :

$$y_t = s_t + v_t$$

où v_t est un bruit blanc gaussien de covariance R . D'après 3.42, on obtient $p(y_{0:t}|H_1)$ récursivement par la formule :

$$p(y_{0:t}|H_1) = p(y_t|y_{0:t-1}, H_1) p(y_{0:t-1}|H_1)$$

Si on examine l'équation 4.12 obtenue dans le développement du filtre de Kalman, on s'aperçoit que $p(y_t|Y_0^{t-1})$ n'est autre que terme de normalisation de cette expression. En effet, en calculant la marginale de $p(y_t, x_t|Y_0^{t-1})$ on obtient :

$$\begin{aligned} p(y_t|y_{0:t-1}, H_1) &= \int_{\mathbb{R}^n} p(y_t, x_t|y_{0:t-1}, H_1) dx_t \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} p(y_t|x_t, H_1) p(x_t|y_{0:t-1}, H_1) dx_t \end{aligned}$$

Or, d'après 4.16, ce terme de normalisation est une gaussienne ayant l'expression suivante :

$$p(y_t|y_{0:t-1}, H_1) = \Gamma(y_t - H_t \hat{x}_{t|t-1}, H_t^T P_{t|t-1} H_t + R)$$

où $\hat{x}_{t|t-1}$ est le prédicteur à un pas de l'état x_t calculé sous l'hypothèse H_1 avec 4.20 comme modèle et où $P_{t|t-1}$ est la covariance de l'erreur de ce prédicteur. Par conséquent, $p(y_{0:t}|H_1)$ s'exprime comme suit :

$$p(y_{0:t}|H_1) = \prod_{\tau=0}^t \Gamma(y_\tau - H_\tau \hat{x}_{\tau|\tau-1}, H_\tau^T P_{\tau|\tau-1} H_\tau + R)$$

ou bien sous sa forme récursive :

$$p(y_{0:t}|H_1) = \Gamma(y_t - H_t \hat{x}_{t|t-1}, H_t^T P_{t|t-1} H_t + R) p(y_{0:t-1}|H_1)$$

Il est en général plus aisé de travailler avec la vraisemblance de l'observation conditionnelle à chacune des hypothèses, c'est à dire avec le logarithme népérien de la densité de probabilité :

$$\begin{aligned} \log(p(y_{0:t}|H_1)) &= -\frac{1}{2} \sum_{\tau=0}^t (y_\tau - H_\tau \hat{x}_{\tau|\tau-1})^T (H_\tau^T P_{\tau|\tau-1} H_\tau + R)^{-1} (y_\tau - H_\tau \hat{x}_{\tau|\tau-1}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\tau=0}^t \log(|H_\tau^T P_{\tau|\tau-1} H_\tau + R|) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Sous l'hypothèse H_0 , comme le bruit d'observation est gaussien, on a $p_V(v_t) = \Gamma(v_t, R)$. Par conséquent, l'équation 3.40 devient dans ce cas :

$$p(y_{0:t}|H_1) = \prod_{\tau=0}^t \Gamma(y_\tau, R)$$

En prenant le logarithme népérien de cette expression, on aboutit à :

$$\log(p(y_{0:t}|H_1)) = -\frac{1}{2} \sum_{\tau=0}^t y_\tau^T R^{-1} y_\tau - \frac{1}{2} \sum_{\tau=0}^t \log(|R|)$$

Le rapport de vraisemblance $\Lambda(y_{0:t})$ est alors calculé par :

$$\begin{aligned} \log(\Lambda(y_{0:t})) &= \log(p(y_{0:t}|H_1)) - \log(p(y_{0:t}|H_0)) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\tau=0}^t \left((y_\tau - H_\tau \hat{x}_{\tau|\tau-1})^T (H_\tau^T P_{\tau|\tau-1} H_\tau + R)^{-1} (y_\tau - H_\tau \hat{x}_{\tau|\tau-1}) - y_\tau^T R^{-1} y_\tau \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\tau=0}^t \log \left(\frac{|H_\tau^T P_{\tau|\tau-1} H_\tau + R|}{|R|} \right) \end{aligned}$$

où sous sa forme récursive :

$$\begin{aligned} \log(\Lambda(y_{0:t})) &= \log(\Lambda(y_{0:t-1})) - \frac{1}{2} (y_t - H_t \hat{x}_{t|t-1})^T (H_t^T P_{t|t-1} H_t + R)^{-1} (y_t - H_t \hat{x}_{t|t-1}) \\ &\quad + \frac{1}{2} y_t^T R^{-1} y_t - \frac{1}{2} \log \left(\frac{|H_t^T P_{t|t-1} H_t + R|}{|R|} \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Le test d'hypothèse nécessite alors les 2 étapes suivantes :

1. Calcul récursif du prédicteur à un pas $\hat{x}_{t|t-1}$ sous l'hypothèses H_1 en construisant le filtre de Kalman de x_t défini dans le théorème 112 s'appuyant sur le modèle défini par 4.20.
2. Calcul récursif par la formule 4.22 du logarithme népérien du rapport de vraisemblance $\log(\Lambda(y_{0:t}))$ et prise de décision en comparant ce rapport au seuil $\log(\eta)$ défini par le critère de décision retenu.

Exemple 118. *Détection d'une sinusoïde dans du bruit blanc gaussien.*

Exemple 119. *Détection RADAR.*

4.2. Approximations numériques du filtrage optimal

4.2.1. Linéarisation : le filtre de Kalman étendu

Face aux non linéarités, le premier réflexe de l'ingénieur est de travailler avec l'approximation linéaire tangente des fonctionnelles non linéaires. Le principe du filtrage de Kalman étendu [7] repose sur ce principe.

Poursuite.

Considérons le modèle non linéaire suivant :

$$x_t = f(x_{t-1}) + g(x_{t-1})w_t \quad (4.23a)$$

$$y_t = h(x_t) + v_t \quad (4.23b)$$

où w_t et v_t sont des bruits blancs gaussiens indépendants de variances respectives Q et R . On suppose que les fonctions f et h sont continûment différentiables et que la fonction g est continue.

On peut penser que si les non-linéarités ne sont pas trop "fortes", il est légitime de remplacer les fonctions $f(x_t)$ et $h(x_t)$ par leurs approximations linéaires au voisinage d'un point \bar{x}_t considéré comme le "plus proche possible" de la valeur de l'état x_t inconnue. La fonction $g(x_t)$ sera elle approximée par sa valeur en ce point $g(\bar{x}_t)$. Les densités de probabilités du prédicteur et du filtre pourrons alors être approchées localement par des densités de probabilité gaussiennes :

$$\begin{aligned} p(x_t|y_{0:t-1}) &\simeq \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}, P_{t|t-1}) \\ p(x_t|y_{0:t}) &\simeq \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}, P_{t|t}) \end{aligned}$$

Le choix du point \bar{x}_t au voisinage duquel se fait la linéarisation est très naturel. Concernant la fonction $f(x_{t-1})$, celle-ci étant exploitée lors de l'étape de prédiction, il est légitime de linéariser celle-ci au voisinage du filtre $\hat{x}_{t-1|t-1}$, ce point étant considéré à cette instant comme le meilleur estimateur disponible. Pour ce qui est de la fonction $h(x_t)$, celle-ci intervenant au cours de la correction, il est naturel de la linéariser au voisinage de la valeur précédemment prédite, soit $\hat{x}_{t|t-1}$.

Théorème 120. *L'approximation linéaire du modèle 4.23 conduit à l'approximation gaussienne de la densité de probabilité a posteriori sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned} p(x_t|Y_0^t) &\simeq \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}, P_{t|t}) \\ \hat{x}_{t|t-1} &= f(\hat{x}_{t-1|t-1}) \\ P_{t|t-1} &= F_x(\hat{x}_{t-1|t-1})P_{t-1|t-1} (F_x(\hat{x}_{t-1|t-1}))^T + g(\hat{x}_{t-1|t-1}) Q (g(\hat{x}_{t-1|t-1}))^T \\ \hat{x}_{t|t} &= \hat{x}_{t|t-1} + K_t(y_t - h(\hat{x}_{t|t-1})) \\ K_t &= P_{t|t-1} H_x(\hat{x}_{t|t-1})^T (H_x(\hat{x}_{t|t-1}) P_{t|t-1} H_x(\hat{x}_{t|t-1})^T + R)^{-1} \\ P_{t|t} &= P_{t|t-1} - P_{t|t-1} H_x(\hat{x}_{t|t-1})^T (H_x(\hat{x}_{t|t-1}) P_{t|t-1} H_x(\hat{x}_{t|t-1})^T + R)^{-1} H_x(\hat{x}_{t|t-1}) P_{t|t-1} \end{aligned}$$

où F_x et H_x désignent respectivement les matrices jacobiennes des applications f et h .

Preuve. Si w_t est considéré gaussien, la probabilité de transition s'écrit comme une densité gaussienne selon :

$$p(x_t|x_{t-1}) = \Gamma(x_t - f(x_{t-1}), g(x_{t-1})Qg(x_{t-1})^T)$$

De même, le bruit d'observation étant gaussien, la densité de probabilité de l'observation s'écrit :

$$p(y_t|x_t) = \Gamma(y_t - h(x_t), R)$$

Supposons qu'à l'instant $t - 1$, la densité de probabilité conditionnelle soit approximée par une densité gaussienne sous la forme :

$$p(x_{t-1}|y_{0:t-1}) \simeq \Gamma(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}, P_{t-1|t-1})$$

Si on réfère au paragraphe 3.1.4 du chapitre 3.1, l'étape de prédiction est calculée par la pseudo-convolution suivante :

$$p(x_t|y_{0:t-1}) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x_t|x_{t-1})p(x_{t-1}|y_{0:t-1})dx_{t-1} \quad (4.24a)$$

$$\simeq \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x_t - f(x_{t-1}), g(x_{t-1})Qg(x_{t-1})^T) \Gamma(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}, P_{t-1|t-1}) dx_{t-1} \quad (4.24b)$$

On réalise alors la linéarisation de f au voisinage de $\hat{x}_{t-1|t-1}$, moyenne de $p(x_{t-1}|y_{0:t-1})$, sous la forme suivante :

$$f(x_{t-1}) \simeq f(\hat{x}_{t-1|t-1}) + F_x(\hat{x}_{t-1|t-1}) (x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1})$$

où $F_x \triangleq \partial f / \partial x$ désigne le jacobien de la fonction f . De plus on approxime la fonction continue g dans ce même voisinage par sa valeur en $\hat{x}_{t-1|t-1}$:

$$g(x_{t-1}) \simeq g(\hat{x}_{t-1|t-1})$$

On obtient alors l'approximation suivante :

$$p(x_t|y_{0:t-1}) \simeq \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x_t - f(\hat{x}_{t-1|t-1}) - F_x(\hat{x}_{t-1|t-1}) (x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}), g(\hat{x}_{t-1|t-1})Qg(\hat{x}_{t-1|t-1})^T) \\ \times \Gamma(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}, P_{t-1|t-1}) dx_{t-1} \quad (4.25)$$

D'après le corollaire ?? avec $(x_t - f(\hat{x}_{t-1|t-1}) - F_x(\hat{x}_{t-1|t-1})\hat{x}_{t-1|t-1}) \rightarrow x$, $F_x(\hat{x}_{t-1|t-1}) \rightarrow F$, $g(\hat{x}_{t-1|t-1})Qg(\hat{x}_{t-1|t-1})^T \rightarrow Q$, $x_{t-1} \rightarrow y$, $\hat{x}_{t-1|t-1} \rightarrow \mu$ et $P_{t-1|t-1} \rightarrow P$, cette convolution peut être réécrite :

$$p(x_t|y_{0:t-1}) \simeq \Gamma(x_t - f(\hat{x}_{t-1|t-1}), F_x(\hat{x}_{t-1|t-1})P_{t-1|t-1}F_x(\hat{x}_{t-1|t-1})^T + g(\hat{x}_{t-1|t-1})Q_tg(\hat{x}_{t-1|t-1})^T)$$

Si on définit :

$$\hat{x}_{t|t-1} \triangleq f(\hat{x}_{t-1|t-1}) \\ P_{t|t-1} \triangleq F_x(\hat{x}_{t-1|t-1})P_{t-1|t-1}F_x(\hat{x}_{t-1|t-1})^T + g(\hat{x}_{t-1|t-1})Q_tg(\hat{x}_{t-1|t-1})^T$$

La densité de probabilité *a posteriori* s'écrit alors :

$$p(x_t|y_{0:t-1}) \simeq \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}, P_{t|t-1})$$

La correction est à nouveau obtenue par application de la règle de Bayes :

$$p(x_t|y_{0:t}) = \frac{\Gamma(y_t - h(x_t), R)p(x_t|y_{0:t-1})}{\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y_t - h(x_t), R)p(x_t|y_{0:t-1})dx_t}$$

Si on injecte l'approximation obtenue précédemment de $p(x_t|y_{0:t-1})$ dans cette expression, on obtient :

$$p(x_t|y_{0:t}) \simeq \frac{\Gamma(y_t - h(x_t), R)\Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}, P_{t|t-1})}{\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y_t - h(x_t), R)\Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}, P_{t|t-1})dx_t}$$

On réalise alors la linéarisation de h au voisinage de $\hat{x}_{t|t-1}$ sous la forme suivante :

$$h(x_t) \simeq h(\hat{x}_{t|t-1}) + H_x(\hat{x}_{t|t-1}) (x_t - \hat{x}_{t|t-1})$$

où H_x désigne le jacobien de la fonction h . On écrit alors l'approximation du produit de densité gaussiennes sous la forme suivante :

$$\Gamma(y_t - h(x_t), R) \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}, P_{t|t-1}) \simeq \Gamma(y_t - h(\hat{x}_{t|t-1}) - H_x(\hat{x}_{t|t-1})(x_t - \hat{x}_{t|t-1}), R) \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}, P_{t|t-1}) \quad (4.26)$$

Notons $H_t \triangleq H_x(\hat{x}_{t|t-1})$. En appliquant le théorème 40 avec $(y_t - h(\hat{x}_{t|t-1}) + H_x(\hat{x}_{t|t-1})\hat{x}_{t|t-1}) \rightarrow x$, $H_x(\hat{x}_{t|t-1}) \rightarrow F$, $R \rightarrow Q$, $x_t \rightarrow y$, $\hat{x}_{t|t-1} \rightarrow \mu$ et $P_{t|t-1} \rightarrow P$, ce produit de gaussiennes peut être réécrit de la manière suivante :

$$\Gamma(y_t - h(x_t), R) \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}, P_{t|t-1}) \simeq \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}, P_{t|t}) \Gamma(y_t - h(\hat{x}_{t|t-1}), H_t P_{t|t-1}^T H_t + R)$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t|t} &= \hat{x}_{t|t-1} + K_t(y_t - h(\hat{x}_{t|t-1})) \\ K_t &= P_{t|t-1} H_x(\hat{x}_{t|t-1})^T (H_x(\hat{x}_{t|t-1}) P_{t|t-1} H_x(\hat{x}_{t|t-1})^T + R_t)^{-1} \\ P_{t|t} &= P_{t|t-1} - P_{t|t-1} H_x(\hat{x}_{t|t-1})^T (H_x(\hat{x}_{t|t-1}) P_{t|t-1} H_x(\hat{x}_{t|t-1})^T + R_t)^{-1} H_x(\hat{x}_{t|t-1}) P_{t|t-1} \end{aligned}$$

■

Remarque 121. Contrairement au filtre de Kalman classique, pour la mise en oeuvre du filtre de Kalman étendu, les gains de corrections, et donc les matrices de covariances, doivent être calculés en ligne. En effet, les matrices jacobiennes F_x et H_x dépendent des estimateurs $\hat{x}_{t-1|t-1}$ et $\hat{x}_{t|t-1}$ respectivement.

Remarque 122. On peut imaginer un certain nombre de variantes à cet algorithme de filtrage. En effet, le principe étant de réaliser une approximation linéaire, le choix du point au voisinage duquel se fait la linéarisation est crucial. Ainsi, quand on réalise la linéarisation de h au voisinage du prédicteur $\hat{x}_{t|t-1}$, on obtient la valeur filtrée $\hat{x}_{t|t}$ qui est sensée être plus proche de l'état réel du système que $\hat{x}_{t|t-1}$. On peut alors linéariser à nouveau la fonction h au voisinage de ce point en espérant commettre moins d'erreur et recalculer la correction. On peut itérer ce processus jusqu'à ce que la variation de l'estimateur ne soit plus significative. Par un procédé analogue, on peut opérer de même pour améliorer la précision de la prédiction en recalculant le point au voisinage duquel se fait la linéarisation de f . Cette technique est connue sous le nom de "filtre de Kalman étendu itéré".

Domaine de validité

Examinons à quelles conditions cette approximation peut être légitime et valide.

Observons dans un premier temps l'effet de la linéarisation de la dynamique f . Celle-ci intervient au moment de la prédiction quand on substitue la convolution 4.24b à l'expression 4.25. Rappelons que, d'après le théorème 43, une densité gaussienne est une unité approchée, c'est à dire que celle-ci tend vers une mesure de Dirac quand sa variance tend vers 0. Ainsi, si $\sqrt{P_{t-1|t-1}}$ tend vers 0, à la limite, il y a égalité. Cela signifie que pour que l'approximation soit valide, il est nécessaire que $\sqrt{P_{t-1|t-1}}$ soit "petit" par rapport au domaine de validité de la linéarisation de f .

Exemple 123. Considérons le système dynamique suivant :

$$x_t = \tan^{-1}(x_{t-1}) + w_t$$

où w_t est un bruit blanc gaussien de variance Q . On a représenté figure 4.1 la déformation induite par la linéarisation avec les valeurs $P_{t-1|t-1} = 0,4$ et $Q = 0,1$. On constate aisément

qu'au voisinage de $\hat{x}_{t-1|t-1} = 0$ l'approximation est très bonne alors que pour $\hat{x}_{t-1|t-1} = \pi/2$, une forte distorsion apparaît. En effet, en ce point, le gradient de f est nul et ceci est interprété comme $x_t = f(\hat{x}_{t-1|t-1}) + w_t$. Par conséquent, le prédicteur pèche par optimisme en allouant la valeur Q à la variance d'erreur de prédiction alors que celle-ci est en réalité plus élevée. Dans cas, l'écart type $\sqrt{P_{t-1|t-1}} \simeq 0,63$ n'est pas négligeable vis à vis du domaine de validité de la linéarisation au point $x = \pi/2$. En revanche, avec $P = 0,01$, la linéarisation est valide presque partout comme le montre la figure 4.2.

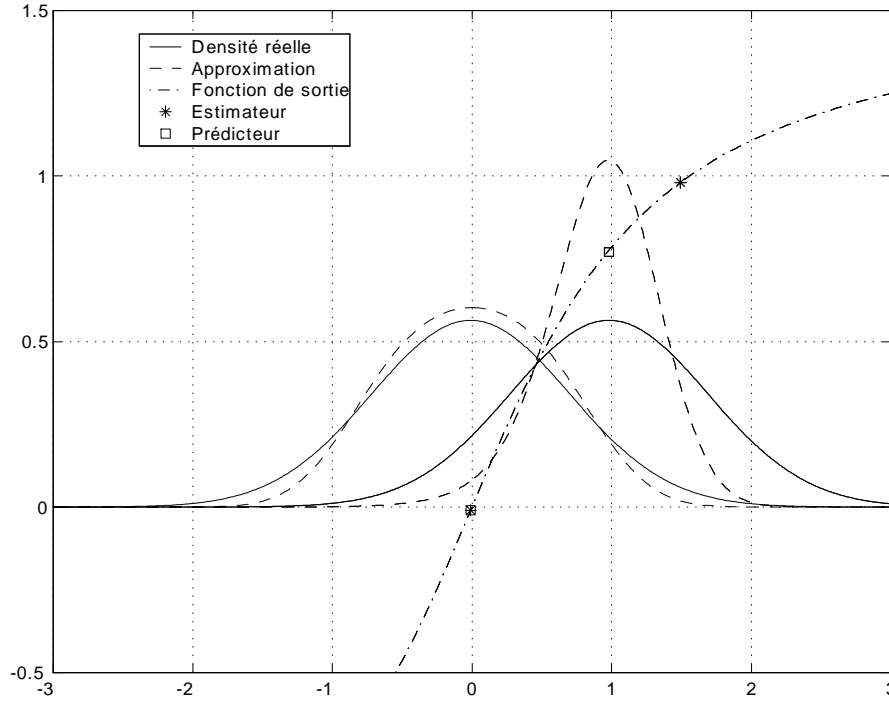


FIG. 4.1 – Distorsion due à la linéarisation en prédiction - $P = 0,4$

L'approximation qui consiste à remplacer $g(x_{t-1})$ par $g(\hat{x}_{t-1|t-1})$ ne sera légitime que si les variations de g au voisinage de $\hat{x}_{t-1|t-1}$ sont suffisamment faibles pour être négligées, ceci dans le domaine distant de l'ordre de $\sqrt{P_{t-1|t-1}}$ de $\hat{x}_{t-1|t-1}$.

Concernant l'approximation de la fonction de sortie h par sa forme linéarisée au voisinage de la valeur prédite $\hat{x}_{t|t-1}$, celle-ci intervient au moment de la correction à travers l'expression 4.26 :

$$\Gamma(y_t - h(x_t), R) \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}, P_{t|t-1}) \simeq \Gamma(y_t - h(\hat{x}_{t|t-1}) - H_x(\hat{x}_{t|t-1})(x_t - \hat{x}_{t|t-1}), R) \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}, P_{t|t-1})$$

Par un raisonnement analogue au précédent, on pourra dire que l'approximation est légitime si l'écart type de prédiction $\sqrt{P_{t|t-1}}$ est suffisamment "petit" par rapport au domaine de validité de la linéarisation de h au voisinage de $\hat{x}_{t|t-1}$.

L'utilisation du filtre de Kalman étendu est donc légitime si les écarts types de prédiction et de correction sont modérés. Ceci s'applique naturellement à la condition initiale. En résumé, le filtre de Kalman étendu peut être utilisé "sans trop de risques" à conditions que :

1. l'écart type initial $\sqrt{P_{0|-1}}$ soit suffisamment petit par rapport aux domaines de validité de la linéarisation des fonctions f et h .
2. l'écart type du bruit de dynamique \sqrt{Q} soit suffisamment petit pour qu'après la prédiction, $\sqrt{P_{t|t-1}}$ reste petit par rapport au domaine de validité de la linéarisation de la fonction h .

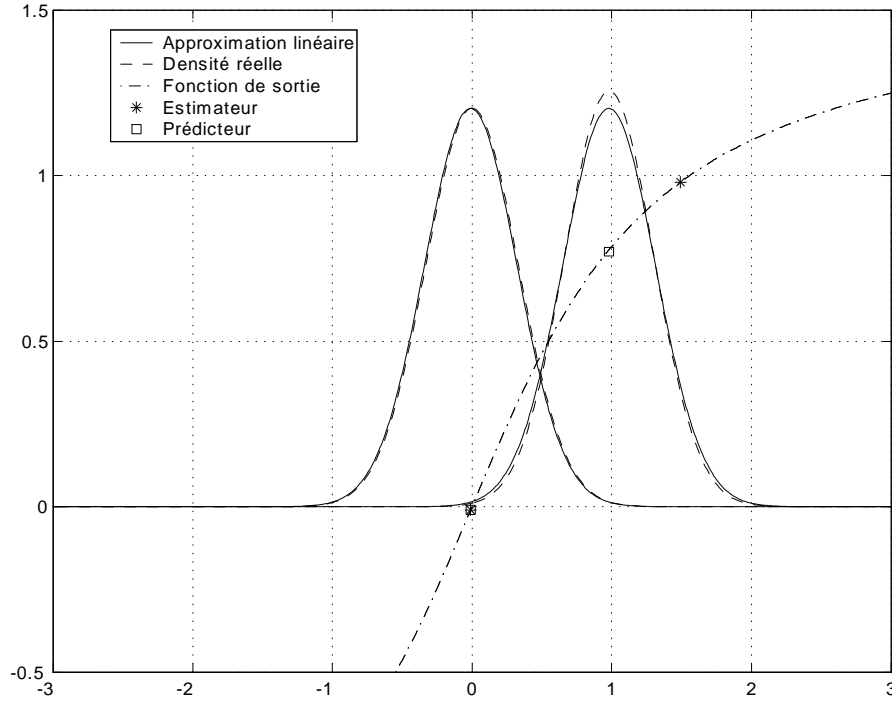


FIG. 4.2 – Distorsion due à la linéarisation en prédiction - $P = 0,01$

3. les variations de g sont suffisamment faibles au voisinage de $\hat{x}_{t|t}$ à une distance de l'ordre de $\sqrt{P_{t|t}}$.

Comme la variance de l'erreur est proportionnelle au rapport Q/R (voir remarque 116), celui-ci devra être suffisamment faible. En pratique, on évalue *a priori* les écarts type $\sqrt{P_{t|t-1}}$ et $\sqrt{P_{t|t}}$ en simulation pour s'assurer que leurs valeurs sont compatibles avec ces contraintes.

Par conséquent, l'utilisation du filtre de Kalman étendu est réservée aux problèmes de poursuite à bruits dynamiques faibles pour lesquels la variance de l'estimateur initialement "petite" le demeure au cours du processus prédiction/correction.

Exemple 124. *Poursuite de la phase brownienne d'un signal sinusoïdal.*

Acquisition et poursuite

Dans le cas où l'incertitude initiale $\sqrt{P_{0|0}}$ est trop importante pour que la linéarisation des fonctions f et h soit valide (item 1 non vérifié) et si, cependant, le bruit de dynamique est suffisamment "faible" (item 2 vérifié), il est possible d'utiliser une technique qui utilise une batterie de filtres de Kalman en parallèle, similaire à ce qui est présenté au paragraphe 4.1.2. En effet, supposons que la densité de probabilité initiale puisse être représentée comme une somme pondérée de N densités gaussiennes :

$$p(x_0) = \sum_{k=1}^N \rho_0^k \Gamma(x_0 - \bar{x}_0^k, P_0^k)$$

Supposons de plus que pour chaque gaussienne, l'écart type $\sqrt{P_0^k}$ est suffisamment petit pour assurer la validité de la linéarisation. Par un calcul analogue à celui mené au paragraphe 4.1.2, on peut montrer que la probabilité *a posteriori* peut être approximée par une somme pondérée

de densités gaussiennes :

$$p(x_t|y_{0:t}) \simeq \sum_{k=1}^N \rho_t^k \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}^k, P_{t|t}^k)$$

où chaque couple $\{\hat{x}_{t|t}^k, P_{t|t}^k\}$, pour $k = 1 \dots N$, est le filtre de Kalman étendu initialisé avec $\{\bar{x}_0^k, P_0^k\}$. Les pondérations ρ_t^k dépendent de la vraisemblance de chacun des estimateurs vis-à-vis des observations :

$$\rho_t^k = \frac{\rho_{t-1}^k \Gamma(y_t - H_x(\hat{x}_{t-1}^k), H_x(\hat{x}_{t-1}^k)^T P_{t-1}^k H_x(\hat{x}_{t-1}^k) + R)}{\sum_{k=1}^N \rho_{t-1}^k \Gamma(y_t - H_x(\hat{x}_{t-1}^k), H_x(\hat{x}_{t-1}^k)^T P_{t-1}^k H_x(\hat{x}_{t-1}^k) + R)}$$

Ces pondérations sont donc proportionnelles aux vraisemblances de chacun des filtres de Kalman en parallèle. Ainsi, le filtre qui est bâti au voisinage le plus proche de l'état initial x_0 a toutes les chances de converger au voisinage de x_t . A terme, les vraisemblances des autres filtres dégénèrent, tous les poids ρ_t^k tendent vers 0 sauf un qui tend vers 1. Cette phase étant acquise, un seul filtre de Kalman étendu est alors suffisant pour assurer la poursuite de l'état.

Exemple 125. *Acquisition et poursuite de la phase brownienne d'un signal sinusoïdal.*

4.2.2. Discrétisation de l'espace d'état

Rappelons que l'écriture récursive de l'évolution de la mesure de probabilité *a posteriori* fait apparaître deux types d'opération. La première, qui s'apparente à une convolution, met en jeu une intégration du produit de deux densités et la seconde un produit de deux densités :

$$p(x_t|y_{0:t}) = \frac{p(y_t|x_t) \int p(x_t|x_{t-1}) p(x_{t-1}|y_{0:t-1}) dx_{t-1}}{\int p(y_t|x_t) \int p(x_t|x_{t-1}) p(x_{t-1}|y_{0:t-1}) dx_{t-1} dx_t} \quad (4.27)$$

Les probabilités de transition $p(x_t|x_{t-1})$ et d'observation $p(y_t|x_t)$ font partie des données du problème, ainsi que la probabilité initiale $p(x_0)$.

Cette approche purement numérique de la résolution du problème de filtrage optimal repose sur l'idée d'échantillonner les densités de probabilité sur une grille construite sur un sous ensemble de l'espace d'état dans lequel on recherche l'estimateur de x_t .

Echantillonnage sur une grille fixe

Soit $\{x^k, k = 1 \dots N\}$ une grille construite sur un sous ensemble fixé de l'espace d'état \mathbb{R}^n . Le principe est d'échantillonner la densité de probabilité $p_X(x)$ sur cette grille. On construit alors une approximation de la densité de probabilité par une mesure, somme pondérée de mesures de Dirac, dont les supports sont les noeuds de cette grille :

$$\bar{p}_X^N(x) = \sum_{k=1}^N \rho^{k,N} \delta_{x^k}(x)$$

où les masses $\rho^{k,N}$ sont définies par :

$$\rho^{k,N} = \frac{p_X(x^k)}{\sum_{k=1}^N p_X(x^k)}$$

Par cette définition, on s'assure que $\bar{p}_X^N(x)$ est bien une mesure de probabilité (normée). Remplacer $p_X(x)$ par son échantillonné $\bar{p}_X^N(x)$ revient à en construire une approximation, dite au

sens faible, de la densité de probabilité dans le sens suivant. Soit $\varphi(x)$ une fonctionnelle d'intérêt continue de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. L'approximation de $p_X(x)$ par son échantillonné signifie :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(x)] &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) p_X(x) dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \rho^{k,N} \varphi(x^k)\end{aligned}$$

La figure 4.3 montre comment une distribution gaussienne peut être échantillonnée par ce procédé, l'écart type de la distribution est ici de 1.

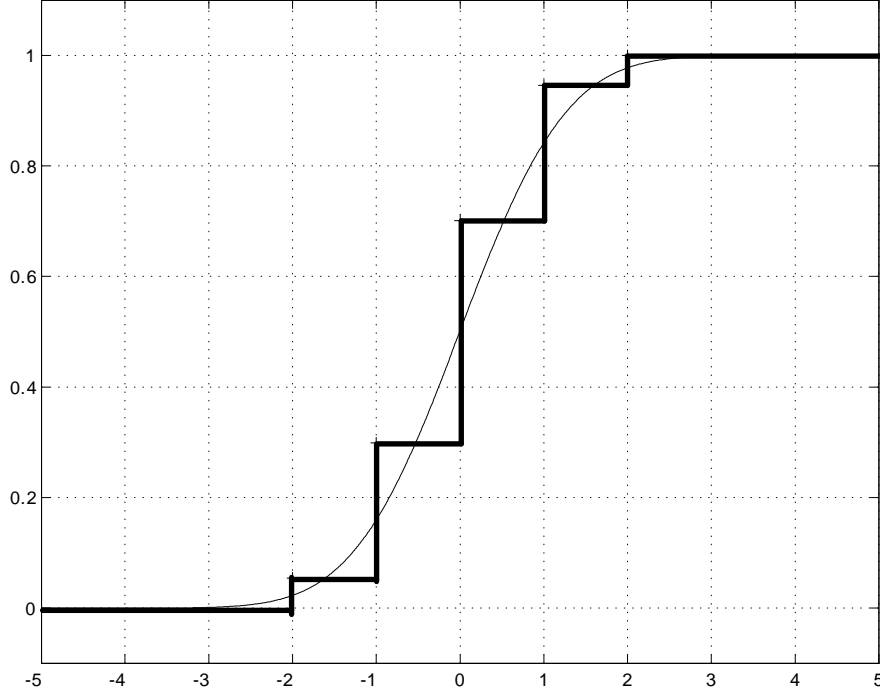


FIG. 4.3 – Fonction de répartition échantillonnée (distribution gaussienne)

Pour N fixé, l'échantillonnage de la densité de probabilité *a posteriori* à l'instant $t-1$ est défini par :

$$\bar{p}(x_{t-1}|y_{0:t-1}) = \sum_{k=1}^N \rho_{t-1|t-1}^k \delta_{x^k}(x_{t-1})$$

avec

$$\rho_{t-1|t-1}^k = \frac{p_{X_{t-1}|Y_{0:t-1}}(x^k|y_{0:t-1})}{\sum_{k=1}^N p_{X_{t-1}|Y_{0:t-1}}(x^k|y_{0:t-1})}$$

La prédiction, convolution avec la densité de probabilité de transition, conduit à

$$\begin{aligned}p(x_t|y_{0:t-1}) &= \int p_{X_t|X_{t-1}}(x_t|x_{t-1}) \bar{p}(x_{t-1}|y_{0:t-1}) dx_{t-1} \\ &= \sum_{k=1}^N \rho_{t-1|t-1}^k \int p_{X_t|X_{t-1}}(x_t|x_{t-1}) \delta_{x^k}(x_{t-1}) dx_{t-1} \\ &= \sum_{k=1}^N p_{X_t|X_{t-1}}(x_t|x^k) \rho_{t-1|t-1}^k\end{aligned}$$

Si on échantillonne alors $p(x_t|y_{0:t-1})$ en chaque point de la grille, on obtient :

$$\bar{p}(x_t|y_{0:t-1}) = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N p_{X_t|X_{t-1}}(x^i|x^k) \rho_{t-1|t-1}^k \delta_{x^i}(x_t)}{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N p_{X_t|X_{t-1}} \rho_{t-1|t-1}^k (x^i|x^k)}$$

qui peut se récrire :

$$\bar{p}(x_t|y_{0:t-1}) = \sum_{i=1}^N \rho_{t|t-1}^i \delta_{x^i}(x_t)$$

où chaque $\rho_{t|t-1}^i$ est obtenu par la convolution (discrète) suivante :

$$\rho_{t|t-1}^i = \frac{\sum_{k=1}^N p_{X_t|X_{t-1}}(x^i|x^k) \rho_{t-1|t-1}^k}{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N p_{X_t|X_{t-1}}(x^i|x^k) \rho_{t-1|t-1}^k}$$

La correction, par la règle de Bayes, conduit alors à :

$$\begin{aligned} p(x_t|y_{0:t}) &\propto \sum_{i=1}^N p_{Y_t|X_t}(y_t|x_t) \rho_{t|t-1}^i \delta_{x^i}(x_t) \\ &= \sum_{i=1}^N p_{Y_t|X_t}(y_t|x^i) \rho_{t|t-1}^i \delta_{x^i}(x_t) \end{aligned}$$

Soit, après normalisation :

$$p(x_t|Y_{0:t}) = \sum_{i=1}^N \rho_{t|t}^i \delta_{x^i}(x_t)$$

où les nouveaux termes de pondération sont définis par :

$$\rho_{t|t}^i = \frac{p_{Y_t|X_t}(y_t|x^i) \rho_{t|t-1}^i}{\sum_{i=1}^N p_{Y_t|X_t}(y_t|x^i) \rho_{t|t-1}^i}$$

L'algorithme utilisant une telle discrétisation est défini comme suit. A noter que pour simplifier les calculs, la normalisation n'est faite qu'une fois, après correction.

Discrétisation de l'espace d'état

1. Construction d'une grille d'un sous ensemble de $\mathbb{R}^n : \{x^k, k = 1 \dots N\}$
2. Initialisation des pondérations de chaque noeud de la grille :

$$\forall k = 1 \dots N, \rho_{0|0}^k = \frac{p_{X_0}(x^k)}{\sum_{k=1}^N p_{X_0}(x^k)}$$

3. Prédiction (convolution) :

$$\forall k = 1 \dots N, \rho_{t|t-1}^k = \sum_{i=1}^N p_{X_t|X_{t-1}}(x^k|x^i) \rho_{t-1|t-1}^i$$

4. Correction (multiplication + normalisation) :

$$\rho_{t|t}^k = \frac{p_{Y_t|X_t}(y_t|x^k) \rho_{t|t-1}^k}{\sum_{i=1}^N p_{Y_t|X_t}(y_t|x^i) \rho_{t|t-1}^i}$$

5. Estimations (moyenne pondérée) de la moyenne et de la matrice de covariance :

$$\hat{x}_{t|t} = \sum_{k=1}^N \rho_{t|t}^k x^k$$

$$P_{t|t} = \sum_{k=1}^N \rho_{t|t}^k (x^k - \hat{x}_{t|t}) (x^k - \hat{x}_{t|t})^T$$

6. Retour en 3.

On peut évidemment envisager toute autre forme d'approximations pour le calcul de l'intégrale de convolution (méthode des trapèzes, de Gauss, de Gauss-Legendre, ...).

Cette méthode, simple à mettre en oeuvre *a priori*, ne peut en réalité que très rarement être utilisée en pratique. En effet, pour un espace d'état de dimension supérieur à 2 ou 3, le nombre de points de la grille est généralement prohibitif et incompatible pour une utilisation en temps réel de l'algorithme. De plus, si le système est instable, il faut prévoir *a priori* l'espace sur lequel se fera la recherche qui en général est beaucoup trop grand pour la précision souhaitée. De plus, la précision finale est directement liée au pas de la grille.

Echantillonnage sur une grille adaptative

Si on observe le comportement de l'algorithme d'estimation décrit au paragraphe 4.2.2, on constate que, en dehors de la phase d'acquisition, la plupart des noeuds de la grille fixe atteignent des poids quasi nuls. En effet, à ce stade, seule la région pertinente de l'espace d'état, région voisine de l'état réel du système, à une vraisemblance forte. Afin d'éviter des calculs inutiles (évaluation de poids quasi nuls pour la plus grande partie des noeuds de la grille) et d'améliorer la précision de l'estimateur, on est amené à construire une grille "flottante" qui soit mieux adaptée à la description locale de la densité de probabilité [8].

Pour ce faire, on souhaiterait que l'échantillonnage soit centré autour de la meilleure estimation dont on peu disposer à un instant donnée et que celle-ci s'étende au voisinage de cette estimation en conformité avec l'écart type de cet estimateur. A l'instant t , le meilleur estima-

teur calculable est $\hat{x}_{t|t-2}$. En effet, le calcul de $\hat{x}_{t|t-1}$ fait appel au maillage défini à l'instant t et n'est, par conséquent, pas encore défini. Il s'agit donc de calculer l'approximation numérique de la densité de probabilité du prédicteur $p(x_t|Y_0^{t-2})$ évaluée sur les noeuds de la grille définie à l'instant $t-1$.

Soit $\{x_{t-1}^k, k=1\dots N\}$ la grille définie à l'instant $t-1$. On considère qu'à cet instant, le prédicteur (à un pas) est disponible et s'écrit sur les noeuds de cette grille :

$$\bar{p}(x_t|y_{0:t-1}) = \sum_{k=1}^N \rho_{t|t-1}^k \delta_{x_{t-1}^k}(x_t)$$

Un pas de prédiction supplémentaire permet d'évaluer le prédicteur à 2 pas, soit :

$$\begin{aligned} p(x_{t+1}|y_{0:t-1}) &= \int p_{X_{t+1}|X_t}(x_{t+1}|x_t) p(x_t|y_{0:t-1}) dx_t \\ &\propto \sum_{k=1}^N p_{X_{t+1}|X_t}(x_{t+1}|x_{t-1}^k) \rho_{t|t-1}^k \end{aligned}$$

L'échantillonnage de la densité $p(x_{t+1}|y_{0:t-1})$ sur la grille définie à $t-1$ permet d'écrire le prédicteur à 2 pas comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{p}(x_{t+1}|y_{0:t-1}) &\propto \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N p_{X_{t+1}|X_t}(x_{t+1}^i|x_{t-1}^k) \rho_{t|t-1}^k \delta_{x_{t-1}^k}(x_t) \\ &= \sum_{k=1}^N \rho_{t+1|t-1}^k \delta_{x_{t-1}^k}(x_t) \end{aligned}$$

où $\rho_{t+1|t-1}^k$ est obtenu par convolution et normalisation :

$$\rho_{t+1|t-1}^k = \frac{\sum_{i=1}^N p_{X_{t+1}|X_t}(x_{t+1}^i|x_{t-1}^k) \rho_{t|t-1}^i}{\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N p_{X_{t+1}|X_t}(x_{t+1}^i|x_{t-1}^k) \rho_{t|t-1}^i}$$

L'obtention de l'approximation de la densité de probabilité du prédicteur à deux pas permet alors de construire les estimateurs de la moyenne et de la covariance selon :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+1|t-1} &= \sum_{k=1}^N \rho_{t+1|t-1}^k x_{t-1}^k \\ P_{t+1|t-1} &= \sum_{k=1}^N \rho_{t+1|t-1}^k (x_{t-1}^k - \hat{x}_{t+1|t-1}) (x_{t-1}^k - \hat{x}_{t+1|t-1})^T \end{aligned}$$

C'est alors sur cette base qu'on construit la nouvelle grille. Celle-ci est centrée sur $\hat{x}_{t+1|t-1}$ et son étendue est dictée par la valeur des écart types de prédiction issus de $\sqrt{P_{t+1|t-1}}$. A ce stade, on peut imaginer toute sorte de méthode de construction de la nouvelle grille. Par exemple, on peut construire un maillage régulier de l'hypercube de \mathbb{R}^n centré en $\hat{x}_{t+1|t-1}$ et dont les faces sont situées à α fois l'écart type de prédiction dans la direction de chaque axe de \mathbb{R}^n , α étant un coefficient "de sécurité". Celui-ci peut être fixé à la valeur 3 par exemple, en référence aux distributions gaussiennes. Pour être plus fin, on peut orienter la grille le long des axes formés par l'ellipsoïde d'incertitude engendré par $P_{t+1|t-1}$ en calculant les vecteurs propres et valeurs propres λ_i de la matrice $P_{t+1|t-1}$. Dans chaque direction propre, la grille sera alors dimensionnée par α fois $\sqrt{\lambda_i}$.

Soit $\{x_t^k, k = 1 \dots N\}$ cette nouvelle grille. Comme précédemment, on peut calculer le filtre sur les noeuds de la grille définie à l'étape précédente :

$$\bar{p}(x_t|y_{0:t}) = \sum_{k=1}^N \rho_{t|t}^k \delta_{x_{t-1}^k}(x_t)$$

avec :

$$\rho_{t|t}^k = \frac{p_{Y_t|X_t}(y_t|x_{t-1}^k) \rho_{t|t-1}^k}{\sum_{k=1}^N p_{Y_t|X_t}(y_t|x_{t-1}^k) \rho_{t|t-1}^k}$$

La prédiction se traduit alors par :

$$p(x_{t+1}|y_{0:t}) = \sum_{k=1}^N p_{X_{t+1}|X_t}(x_{t+1}|x_{t-1}^k) \rho_{t|t}^k$$

Cette densité de probabilité est alors échantillonnée sur la nouvelle grille et s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{p}(x_{t+1}|y_{0:t}) &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N p_{X_{t+1}|X_t}(x_t^i|x_{t-1}^k) \rho_{t|t}^k \delta_{x_t^i}(x_{t+1}) \\ &\quad \sum_{k=1}^N \rho_{t+1|t}^k \delta_{x_t^k}(x_t) \end{aligned}$$

avec :

$$\rho_{t+1|t}^k = \frac{\sum_{i=1}^N p_{X_{t+1}|X_t}(x_t^k|x_{t-1}^i) \rho_{t|t}^i}{\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N p_{X_{t+1}|X_t}(x_t^k|x_{t-1}^i) \rho_{t|t}^i}$$

Il est important de noter que ce calcul s'appuie sur la densité de probabilité de transition entre un noeud de la grille définie à l'instant t et un noeud défini sur la nouvelle grille.

Discrétisation adaptative de l'espace d'état

1. Construction d'une grille d'un sous ensemble de \mathbb{R}^n conforme à la densité de probabilité initiale : $\{x_0^k, k = 1 \dots N\}$
2. Initialisation des pondérations de chaque noeud de la grille en fonction de la densité de probabilité initiale :

$$\forall k = 1 \dots N, \rho_{0|t-1}^k = \frac{p_{X_0}(x_0^k)}{\sum_{k=1}^N p_{X_0}(x_0^k)}$$

3. Correction (multiplication + normalisation) :

$$\forall k = 1 \dots N, \rho_{t|t}^k = \frac{p_{Y_t|X_t}(y_t|x_{t-1}^k) \rho_{t|t-1}^k}{\sum_{k=1}^N p_{Y_t|X_t}(y_t|x_{t-1}^k) \rho_{t|t-1}^k}$$

4. Estimations (moyenne pondérée) de la moyenne et de la matrice de covariance :

$$\hat{x}_{t|t} = \sum_{k=1}^N \rho_{t|t}^k x^k$$

$$P_{t|t} = \sum_{k=1}^N \rho_{t|t}^k (x^k - \hat{x}_{t|t}) (x^k - \hat{x}_{t|t})^T$$

5. Prédiction à 2 pas :

$$\rho_{t+1|t-1}^k = \frac{\sum_{i=1}^N p_{X_{t+1}|X_t}(x_{t-1}^k|x_{t-1}^i) \rho_{t|t-1}^i}{\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N p_{X_{t+1}|X_t}(x_{t-1}^k|x_{t-1}^i) \rho_{t|t-1}^i}$$

6. Estimation des moyennes et covariances du prédictor à 2 pas :

$$\hat{x}_{t+1|t-1} = \sum_{k=1}^N \rho_{t+1|t-1}^k x_{t-1}^k$$

$$P_{t+1|t-1} = \sum_{k=1}^N \rho_{t+1|t-1}^k (x_{t-1}^k - \hat{x}_{t+1|t-1}) (x_{t-1}^k - \hat{x}_{t+1|t-1})^T$$

7. Calcul de la nouvelle grille $\{x_t^k, k = 1 \dots N\}$ centrée en $\hat{x}_{t+1|t-1}$ et de covariance $P_{t+1|t-1}$.

8. Prédiction à un pas calculée sur la nouvelle grille :

$$\rho_{t+1|t}^k = \frac{\sum_{i=1}^N p_{X_{t+1}|X_t}(x_t^k|x_{t-1}^i) \rho_{t|t}^i}{\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N p_{X_{t+1}|X_t}(x_t^k|x_{t-1}^i) \rho_{t|t}^i}$$

9. Retour en 3.

4.2.3. Méthodes séquentielles de Monte-Carlo

Cette technique de filtrage non-linéaire porte également le nom de "filtrage particulaire" et repose sur la simulation de type Monte-Carlo des processus à estimer. On réalise une approximation de la densité de probabilité conditionnelle par une somme pondérée de mesures de Dirac. Cette approximation repose sur la loi des grands nombres présentée dans le théorème 46. D'après ce théorème, la mesure de probabilité de toute variable aléatoire X de variance finie peut être approchée par un tirage de N réalisations de la variable X indépendantes :

$$p_N(x) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}(x)$$

où x_i désigne une des réalisations de la variable aléatoire X . Cette approximation s'entend au sens faible, c'est à dire en dualité sur des fonctions tests. Soit $\varphi(x)$ une fonctionnelle mesurable, on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbb{E}_N[\varphi(x)] \triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(x_i) \right) = \mathbb{E}[\varphi(x)]$$

Cette limite s'entend, en particulier, au sens de la moyenne quadratique (voir la loi des grands nombres, théorème 46).

Approximation de la densité de probabilité *a priori*

Considérons un processus stochastique $x_t \in \mathbb{R}^n$ à temps discret dont l'évolution est régie par l'équation suivante :

$$x_{t+1} = f(x_t, w_t) \quad (4.28)$$

où $x_t \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système et w_t est un bruit blanc. Il est clair qu'une trajectoire du processus $\{x_0, \dots, x_t\}$ est complètement déterminée, de manière injective, par la donnée de la condition initiale x_0 et d'une trajectoire de bruit $\{w_0, \dots, w_{t-1}\}$. La densité de probabilité de la trajectoire du processus $p(x_0, \dots, x_t)$ peut donc être approchée par N tirages indépendants de ces événements. Soit $\{x_0^i, \dots, x_t^i\}$ la trajectoire obtenue à partir du tirage numéro i de la condition initiale x_0 et de la séquence de bruits $\{w_0^i, \dots, w_{t-1}^i\}$ en appliquant la dynamique $x_{t+1}^i = f(x_t^i, w_t^i)$, la densité de probabilité de la trajectoire sera alors approchée par l'expression suivante :

$$p(x_0, \dots, x_t) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_0^i}(x_0) \otimes \dots \otimes \delta_{x_t^i}(x_t) \quad (4.29)$$

Si on calcule la loi marginale de x_t , on obtient l'approximation de la densité de probabilité de x_t par :

$$p(x_t) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_t^i}(x_t)$$

Si $\varphi(x)$ est une fonction d'intérêt que l'on souhaite estimer, son espérance *a priori* est alors approchée par :

$$\mathbb{E}[\varphi(x_t)] \simeq \widehat{\varphi}_N(x_t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(x_t^i)$$

De plus, en appliquant la loi des grands nombres (théorème 46) à la variable aléatoire $\varphi(X_t)$, on peut conclure que :

$$\mathbb{E}[(\varphi(x_t) - \widehat{\varphi}_N(x_t))^2] = \frac{\mathbb{E}[(\varphi(x_t) - \mathbb{E}[\varphi(x_t)])^2]}{N}$$

Cela signifie que la variance de l'erreur commise en utilisant l'approximation a une variance qui décroît en $1/N$ si la variance de la fonctionnelle à estimer est bornée. A noter que si le système est instable, il n'y a pas convergence uniforme de l'estimateur. En d'autres termes, pour une précision souhaitée imposée, le nombre de tirages dépend de N . Il faut de plus remarquer que la précision de l'approximation de l'espérance $E[\varphi(x_t)]$ est indépendante de la dimension du vecteur x_t mais dépend uniquement du nombre N de particules utilisé. Par conséquent, puisque le nombre de particules induit la précision obtenue, celui-ci est déterminé par l'étendue de la condition initiale (à travers le tirage de x_0) et par la dimension du vecteur de bruit w_t (à travers le tirage des trajectoires de bruit $\{w_0^i, \dots, w_{t-1}^i\}$).

Approximation de la densité *a posteriori*

Considérons le processus décrit par l'équation d'état stochastique 4.28 et observé partiellement par le processus y_t défini par :

$$y_t = h(x_t, v_t)$$

où v_t est un bruit blanc, indépendant de w_t . L'utilisation directe de la loi des grands nombre à l'approximation de la densité de probabilité *a posteriori*, c'est à dire $p(x_t|y_{0:t})$, supposerait pouvoir réaliser un tirage aléatoire de X_t conditionnellement à $Y_{0:t}$, ce qui en général n'est pas possible pratiquement. En effet, ceci reviendrait à avoir résolu le problème de départ.

Pour cette raison, on utilise ce que l'on nomme un "échantillonnage pondéré". Rappelons que l'estimation repose sur le calcul de la probabilité conditionnelle $p(x_{0:t}|y_{0:t})$ qui s'exprime récursivement, d'après l'équation générale du filtrage bayésien, de la manière suivante :

$$p(x_{0:t}|y_{0:t}) = \frac{p(y_{0:t}|x_{0:t})}{\int p(y_{0:t}|x_{0:t}) p(x_{0:t}) dx_{0:t}} p(x_{0:t}) \quad (4.30)$$

Considérons à présent l'approximation particulière de la densité de probabilité *a priori* définie par l'expression 4.29. En reportant cette expression dans 4.30 et en considérant le terme fractionnaire comme un coefficient de $p(x_{0:t})$, on obtient :

$$p(x_{0:t}|y_{0:t}) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{p(y_{0:t}|(x_{0:t})^i)}{\int p(y_{0:t}|x_{0:t}) p(x_{0:t}) dx_{0:t}} \delta_{(x_{0:t})^i}(x_{0:t}) \quad (4.31)$$

où $(x_{0:t})^i \triangleq \{x_0^i, \dots, x_t^i\}$ désigne la trajectoire particulière numéro i et où, par définition, $\delta_{(x_{0:t})^i}(x_{0:t}) \triangleq \delta_{x_0^i}(x_0) \otimes \dots \otimes \delta_{x_t^i}(x_t)$. Rappelons que le terme intégrale est un terme de normalisation. En effet, si on intègre 4.31 en fonction de $dx_{0:t}$, on doit avoir :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{p(y_{0:t}|(x_{0:t})^i)}{\int p(y_{0:t}|x_{0:t}) p(x_{0:t}) dx_{0:t}} = 1$$

l'intégration sur les mesures de Dirac étant égales à 1. Si on récrit l'expression 4.31 sous la forme d'une somme de mesures de Dirac pondérées, on obtient :

$$p(x_{0:t}|y_{0:t}) \simeq \sum_{i=1}^N \rho_t^i \delta_{(x_{0:t})^i}(x_{0:t})$$

où les termes de pondérations s'expriment selon :

$$\rho_t^i = \frac{p(y_{0:t}|(x_{0:t})^i)}{\sum_{j=1}^N p(y_{0:t}|(x_{0:t})^j)} \quad (4.32)$$

En utilisant le caractère markovien de l'observation, il est clair que :

$$p(y_{0:t}|(x_{0:t})^i) = p(y_t|x_t^i) p(y_{0:t-1}|(x_{0:t-1})^i)$$

ce qui permet d'écrire une formulation récursive du calcul des pondérations selon :

$$\rho_t^i = \frac{p(y_t|x_t^i)}{\sum_{j=1}^N p(y_t|x_t^j) \rho_{t-1}^j} \rho_{t-1}^i$$

Telle que décrite ici, cette technique de filtrage est peu utilisable en pratique, pour deux raisons essentielles :

1. L'approximation de la densité *a priori* décrite dans le paragraphe 4.2.3 n'est pas uniforme pour des systèmes instables, ce qui est souvent le cas en pratique. Le nombre de particule satisfaisant une précision donnée dépend donc de l'horizon d'observation, ce qui est inacceptable en général pour un problème de filtrage.
2. L'approximation de la densité de probabilité par une somme de mesures de Dirac pondérés dégénère rapidement avec le temps, une seule particule a tendance à prendre tout le poids (qui tend vers 1) alors que toutes les autres ont un poids qui tend vers 0.

Théorème 126. *La distribution des vraisemblance d'une trajectoire d'observation d'un système dynamique à bruit additif blanc gaussien est asymptotiquement dégénérée.*

Preuve. Considérons un problème de filtrage où le bruit d'observation est de type additif gaussien ; L'équation d'observation est la suivante :

$$y_t = h(x_t) + v_t$$

où v_t est un bruit blanc gaussien de variance R . Dans un tel cas, la vraisemblance d'une trajectoire d'observation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$p(y_{0:t}|x_{0:t}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi R)^{t+1}}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{\tau=0}^t (y_\tau - h(x_\tau))^2 / R} \quad (4.33a)$$

$$= (2\pi R)^{-\frac{t+1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{\tau=0}^t (y_\tau - h(x_\tau))^2 / R} \quad (4.33b)$$

Cherchons à évaluer les statistiques de cette quantité. Pour ce faire, calculons en les moments de la manière suivante :

$$E[(p(y_{0:t}|x_{0:t}))^q] = \int \int (p(y_{0:t}|x_{0:t}))^q p(y_{0:t}, x_{0:t}) dy_{0:t} dx_{0:t}$$

Comme, par définition de l'espérance conditionnelle, $p(y_{0:t}|x_{0:t}) = p(y_{0:t}|x_{0:t}) p(x_{0:t})$, cette espérance s'écrit :

$$E[(p(y_{0:t}|x_{0:t}))^q] = \int \int (p(y_{0:t}|x_{0:t}))^{q+1} p(x_{0:t}) dy_{0:t} dx_{0:t} \quad (4.34)$$

En utilisant l'expression 4.33, on obtient :

$$\begin{aligned} (p(y_{0:t}|x_{0:t}))^q &= (2\pi R)^{-q\frac{t+1}{2}} e^{-\frac{q}{2} \sum_{\tau=0}^t (y_\tau - h(x_\tau))^2 / R} \\ &= q^{-\frac{t+1}{2}} (2\pi R)^{(1-q)\frac{t+1}{2}} \left[\left(\frac{2\pi R}{q} \right)^{-\frac{t+1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{\tau=0}^t (y_\tau - h(x_\tau))^2 / (R/q)} \right] \end{aligned}$$

On peut alors remarquer que le terme entre crochets n'est autre que la vraisemblance d'une trajectoire correspondant à un bruit additif d'observation de variance R/q . Notons celle-ci :

$$\tilde{p}(y_{0:t}|x_{0:t}) \triangleq \left(\frac{2\pi R}{q}\right)^{-\frac{t+1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{\tau=0}^t (y_\tau - h(x_\tau))^2 / (R/q)}$$

L'expression 4.34 devient :

$$E[(p(y_{0:t}|x_{0:t}))^q] = (q+1)^{-\frac{t+1}{2}} (2\pi R)^{-q\frac{t+1}{2}} \int \int \tilde{p}(y_{0:t}|x_{0:t}) p(x_{0:t}) dy_{0:t} dx_{0:t}$$

Le terme intégral pouvant s'interpréter comme $\tilde{p}(y_{0:t}, x_{0:t})$, celui-ci est égale à l'unité. Par conséquent, on a :

$$E[(p(y_{0:t}|x_{0:t}))^q] = (q+1)^{-\frac{t+1}{2}} (2\pi R)^{-q\frac{t+1}{2}}$$

La moyenne de la vraisemblance d'une trajectoire s'écrit donc :

$$E[p(y_{0:t}|x_{0:t})] = \frac{1}{\sqrt{(4\pi R)^{t+1}}}$$

et sa variance :

$$\begin{aligned} E[(p(y_{0:t}|x_{0:t}))^2] - (E[p(y_{0:t}|x_{0:t})])^2 &= \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{t+1} - 1 \right) \frac{1}{(4\pi R)^{t+1}} \\ &\underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^t \frac{1}{(4\pi R)^t} \end{aligned}$$

Le rapport entre l'écart type de la vraisemblance d'une trajectoire et sa moyenne est donc asymptotiquement équivalent à :

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{t}{2}}$$

qui tend vers l'infini quand t tend vers l'infini. ■

Si considère les valeurs normalisées des poids particuliers définis par l'expression 4.32, leur moyenne étant finie et égale à $1/N$, leurs écart type tendent asymptotiquement vers l'infini. Comme ceux-ci sont bornés par l'unité, on peut en conclure que tous les poids tendent vers 0 sauf un dont la valeur tend vers 1, ceci, même si le système dynamique est stable.

Algorithmes à redistributions

Pour pallier les inconvénients majeurs évoqués précédemment, il convient de modifier l'algorithme présenté au paragraphe 4.2.3 de sorte que les pondérations ρ_t^i ne dégénèrent pas. L'objectif à poursuivre est donc de continuer à représenter correctement la probabilité *a posteriori* tout en évitant que les poids des particules tendent vers 0 mais restent au voisinage de $1/N$, valeur idéale pour l'application de la loi des grands nombres. Considérons qu'à l'instant t on dispose d'une approximation particulière de la densité de probabilité *a posteriori* sous la forme suivante :

$$p(x_t|y_{0:t}) \simeq \sum_{i=1}^N \rho_t^i \delta_{x_t^i}(x_t)$$

L'objectif d'une redistribution est de remplacer cette approximation par une autre représentation ayant la même structure :

$$\tilde{p}(x_t|y_{0:t}) \simeq \sum_{i=1}^N \tilde{\rho}_t^i \delta_{\tilde{x}_t^i}(x_t)$$

avec $\sum_{i=1}^N \tilde{\rho}_t^i = 1$ comme contrainte et telle que :

1. Les nouveaux poids $\tilde{\rho}_t^i$ soient "aussi proches que possible" de $1/N$. Ceci peut se traduire par la minimisation d'une norme sur les poids du type :

$$\sum_{i=1}^N \|\tilde{\rho}_t^i - 1/N\| \quad (4.35)$$

2. La nouvelle représentation de la densité de probabilité soit "aussi proches que possibles" de l'ancienne, c'est à dire telle, pour toute fonction d'intérêt $\varphi(x)$, on cherche à minimiser la quantité suivante :

$$\left\| \sum_{i=1}^N \rho_t^i \varphi(x_t^i) - \sum_{i=1}^N \tilde{\rho}_t^i \varphi(\tilde{x}_t^i) \right\| \quad (4.36)$$

Ce problème peut donc être vu comme un problème d'optimisation sous contrainte, les deux critères étant en effet *a priori* contradictoires.

Filtre autogénérateur (bootstrap filter).

Une première solution consiste à assurer l'égalité à zéro du critère 4.35 en fixant $\tilde{\rho}_t^i = 1/N$; le second objectif sera rempli en réalisant un tirage aléatoire des N nouveaux supports des mesures de Dirac conformément à la densité de probabilité avant redistribution $\sum_{i=1}^N \rho_t^i \delta_{x_t^i}(x_t)$. Il est clair que, par cette procédure, les particules de poids les plus forts vont se multiplier alors que les particules de poids faible vont avoir tendance à disparaître. Puisque cette opération est réalisée par tirages aléatoires, la mesure de l'erreur commise ne peut se faire qu'en terme de probabilités. Dans ce cas, la norme sur la densité de probabilité de l'expression 4.36 qu'on cherche à minimiser est $E[\|\bullet\|^2]$. Notons :

$$\bar{\varphi}_t \triangleq \sum_{i=1}^N \rho_t^i \varphi(x_t^i)$$

la moyenne de la fonction d'intérêt $\varphi(x_t)$ avant redistribution. La norme qui quantifie l'erreur commise par la redistribution 4.36 peut se développer selon :

$$E \left[\left\| \bar{\varphi}_t - \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \varphi(\tilde{x}_t^i) \right\|^2 \right] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N E \left[(\bar{\varphi}_t - \varphi(\tilde{x}_t^i))^2 \right] + \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j=1}^N E \left[(\bar{\varphi}_t - \varphi(\tilde{x}_t^i)) (\bar{\varphi}_t - \varphi(\tilde{x}_t^j)) \right]$$

A noter que dans ce calcul d'espérance, les variables ρ_t^i et x_t^i ne sont pas aléatoires, elles servent à décrire la densité de probabilité ; seules les variables \tilde{x}_t^i sont aléatoires.

Les tirages des particules \tilde{x}_t^i étant indépendants et de même loi ($\sum_{i=1}^N \rho_t^i \delta_{x_t^i}(x_t)$), on a, $\forall i = 1 \dots N$:

$$\begin{aligned} E[\varphi(\tilde{x}_t^i)] &= \bar{\varphi}_t \\ E[(\bar{\varphi}_t - \varphi(\tilde{x}_t^i))^2] &= \sum_{j=1}^N \rho_t^j (\varphi(x_t^j) - \bar{\varphi}_t)^2 \end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$E \left[\left\| \bar{\varphi}_t - \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \varphi(\tilde{x}_t^i) \right\|^2 \right] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \rho_t^j (\varphi(x_t^j) - \bar{\varphi}_t)^2$$

Par conséquent, l'erreur quadratique moyenne induite par le processus de redistribution est bornée par la variance de $\varphi(x_t)$ sous la loi avant redistribution divisée par le nombre de particules. On observe à nouveau la convergence en $1/\sqrt{N}$ de la loi des grands nombres.

Exemple 127. *Système linéaire à bruit ponctuel.*

4.2.4. Mélange de gaussiennes

Estimation des systèmes linéaires non gaussiens

On a montré précédemment (paragraphe 4.1.2) que pour un système linéaire gaussien dont la condition initiale est une somme pondérée de N densités de probabilité gaussiennes, le filtre optimal est calculable en dimension finie. Plus précisément, si la densité de probabilité *a priori* s'écrit :

$$p(x_0) = \sum_{k=1}^N \rho_0^k \Gamma(x_0 - \bar{x}_0^k, P_0^k)$$

$$\sum_{k=1}^N \rho_0^k = 1$$

la densité de probabilité *a posteriori* s'écrit dans ce cas comme une somme pondérée de N densités gaussiennes :

$$p(x_t | y_{0:t}) = \sum_{k=1}^N \rho_t^k \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}^k, P_{t|t}^k)$$

où l'ensemble des estimateurs $\{\hat{x}_{t|t}^k, P_{t|t}^k, k = 1 \dots N\}$ sont définis comme N filtres de Kalman en parallèle (indépendants les uns des autres et initialisés par \bar{x}_0^k, P_0^k). Les pondérations ρ_t^k dépendent des vraisemblances de chaque filtre. Cette propriété peut être exploitée pour développer un algorithme d'estimation dans le cas où les densités de probabilité des bruits sont elles-même décomposées comme des sommes pondérées de densités gaussiennes [9] [10].

Considérons un système linéaire défini de la manière suivante :

$$x_t = Fx_{t-1} + Gw_t \quad (4.37a)$$

$$y_t = Hx_t + v_t \quad (4.37b)$$

où v_t et w_t sont des bruits blancs (non gaussiens) qui peuvent être représentés par une somme pondérée de mesures de probabilité gaussiennes :

$$p(w_t) = \sum_{j=1}^m \eta^j \Gamma(w_t - \bar{w}^j; Q^j) \quad (4.38a)$$

$$p(v_t) = \sum_{j=1}^p \gamma^j \Gamma(v_t - \bar{v}^j; R^j) \quad (4.38b)$$

avec :

$$\sum_{j=1}^m \eta^j = 1, \sum_{j=1}^p \gamma^j = 1$$

afin d'assurer que les mesures de probabilité soient normées. A noter que cette représentation inclut, par exemple, les bruits de type ponctuel, les mesures de Dirac étant des cas particuliers de mesures de probabilité gaussiennes.

Exemple 128. Perturbation ponctuelle.

Pour décrire la densité de probabilité de transition, il suffit de considérer que pour obtenir une réalisation de la variable w_t il faut d'abord tirer j selon la loi multinomiale de probabilités

$\{\eta_j, j = 1 \dots m\}$ et que, sachant j , w_t est alors distribuée selon une loi gaussienne de moyenne \bar{w}^j et de variance Q^j . La densité de probabilité de transition s'écrit donc :

$$p(x_t|x_{t-1}) = \sum_{j=1}^m \eta^j \Gamma(x_t - Fx_{t-1} - G\bar{w}^j; GQ^jG^T)$$

Par un raisonnement analogue, la densité de probabilité de l'observation s'écrit :

$$p(y_t|x_t) = \sum_{j=1}^p \gamma^j \Gamma(y_t - Hx_t - \bar{v}^j; R^j)$$

Rappelons que la singularité éventuelle de l'élément GQ^jG^T ne remet pas en cause l'existence de la mesure de probabilité, sa densité devant être alors considérée au sens des distributions. (voir théorème 44).

Théorème 129. *Si, à l'instant $t - 1$, la densité de probabilité a posteriori du système 4.37 dont les perturbations sont définies comme des sommes pondérées de densités de probabilité gaussiennes (4.38a et 4.38b) est une somme pondérée de N densités gaussiennes, alors, à l'instant t , la densité de probabilité a posteriori de ce système est égale à une somme pondérée de $N \times m \times p$ densités gaussiennes.*

Preuve. Supposons qu'à l'instant $t - 1$ la mesure de probabilité *a posteriori* ai l'expression suivante :

$$p(x_{t-1}|y_{0:t-1}) = \sum_{k=1}^N \rho_{t-1}^k \Gamma(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}^k; P_{t-1|t-1}^k)$$

L'étape de prédiction (formule 3.19) conduit à :

$$p(x_t|y_{0:t-1}) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \rho_{t-1}^k \eta^j \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x_t - Fx_{t-1} - G\bar{w}^j; GQ^jG^T) \Gamma(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}^k; P_{t-1|t-1}^k) dx_{t-1}$$

En utilisant le corollaire ??, on obtient :

$$p(x_t|y_{0:t-1}) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \rho_{t-1}^k \eta^j \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}^{k,j}; P_{t|t-1}^{k,j})$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t|t-1}^{k,j} &= F\hat{x}_{t-1|t-1}^k + G\bar{w}^j \\ P_{t|t-1}^{k,j} &= FP_{t-1|t-1}^k F^T + GQ^jG^T \end{aligned}$$

Ainsi, après prédiction, la représentation de la mesure de probabilité *a posteriori* comporte $N \times m$ mesures gaussiennes. L'étape de correction s'écrit alors :

$$\begin{aligned} p(x_t|Y_{0:t}) &\propto p(y_t|x_t) p(x_t|y_{0:t-1}) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^p \rho_{t-1}^k \eta^j \gamma^l \Gamma(y_t - Hx_t - \bar{v}^l; R^l) \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}^{k,j}; P_{t|t-1}^{k,j}) \end{aligned}$$

Le théorème 40 conduit alors à :

$$p(x_t|Y_{0:t}) \propto \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^p \rho_{t-1}^k \eta^j \gamma^l \Gamma(y_t - H\hat{x}_{t|t-1}^{k,j} - \bar{v}^l; HP_{t|t-1}^{k,j}H^T + R^l) \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}^{k,j,l}; P_{t|t}^{k,j,l})$$

avec :

$$\begin{aligned}\hat{x}_{t|t}^{k,j,l} &= \hat{x}_{t|t-1}^{k,j} + K_t^{k,j,l} \left(y_t - H \hat{x}_{t|t-1}^{k,j} - \bar{v}^l \right) \\ K_t^{k,j,l} &= H P_{t|t-1}^{k,j} \left(H P_{t|t-1}^{k,j} H^T + R^l \right)^{-1} \\ P_{t|t}^{k,j,l} &= P_{t|t-1}^{k,j} - K_t^{k,j,l} H P_{t|t-1}^{k,j}\end{aligned}$$

En définitive, après normalisation, on a ;

$$p(x_t | Y_0^t) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^p \rho_t^{k,j,l} \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}^{k,j,l}; P_{t|t}^{k,j,l})$$

avec :

$$\rho_t^{k,j,l} = \frac{\rho_{t-1}^k \eta^j \gamma^l \Gamma(y_t - H \hat{x}_{t|t-1}^{k,j} - \bar{v}^l; H P_{t|t-1}^{k,j} H^T + R^l)}{\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^p \rho_{t-1}^k \eta^j \gamma^l \Gamma(y_t - H \hat{x}_{t|t-1}^{k,j} - \bar{v}^l; H P_{t|t-1}^{k,j} H^T + R^l)}$$

Ainsi, partant de N densités gaussiennes, on obtient bien après un pas de prédiction/correction $N \times m \times p$ densités gaussiennes dans la représentation de la densité *a posteriori*. ■

L'application directe du théorème 129 pour construire un estimateur est évidemment in-envisageable en pratique, le nombre de densités gaussiennes (et donc de filtres de Kalman en parallèle) croissant exponentiellement avec le temps. En revanche, il est possible de limiter cette explosion numérique en s'accordant certaines approximations. Le principe de cette approximation consiste à fixer *a priori* le nombre de densités gaussiennes à la valeur N . Pour ce faire, il est nécessaire de remplacer la somme de $N \times m \times p$ densités gaussiennes induites après un pas de prédiction/correction par la somme de N densités gaussiennes :

$$p(x_t | y_{0:t}) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^p \rho_t^{k,j,l} \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}^{k,j,l}; P_{t|t}^{k,j,l}) \simeq \sum_{k=1}^N \rho_t^k \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}^k; P_{t|t}^k)$$

Diverses approches peuvent être envisagée pour opérer cette réduction. La plus simple, et la plus populaire, consiste à ne retenir que les N densités de poids les plus forts et de renormaliser.

Systèmes linéaires non gaussiens - Mélange de gaussiennes

1. Initialisation des densités gaussiennes en fixant $\{\rho_0^k, \bar{x}_0^k, P_0^k, k = 1 \dots N\}$

$$p(x_0) = \sum_{k=1}^N \rho_0^k \Gamma(x_0 - \bar{x}_{0|0}^k, P_{0|0}^k), \quad \sum_{k=1}^N \rho_0^k = 1$$

2. Calcul des $N \times m \times p$ filtres de Kalman en parallèle : $\forall k = 1 \dots N, \forall j = 1 \dots m, \forall l = 1 \dots p$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t|t-1}^{k,j} &= F \hat{x}_{t-1|t-1}^k + G \bar{w}^j \\ P_{t|t-1}^{k,j} &= F P_{t-1|t-1}^k F^T + G Q^j G^T \\ K_t^{k,j,l} &= H P_{t|t-1}^{k,j} (H P_{t|t-1}^{k,j} H^T + R^l)^{-1} \\ \hat{x}_{t|t}^{k,j,l} &= \hat{x}_{t|t-1}^{k,j} + K_t^{k,j,l} (y_t - H \hat{x}_{t|t-1}^{k,j} - \bar{v}^l) \\ P_{t|t}^{k,j,l} &= P_{t|t-1}^{k,j} - K_t^{k,j,l} H P_{t|t-1}^{k,j} \end{aligned}$$

3. Calcul des $N \times m \times p$ termes de pondérations :

$$\rho_t^{k,j,l} = \frac{\rho_{t-1}^k \eta^j \gamma^l \Gamma(y_t - H \hat{x}_{t|t-1}^{k,j} - \bar{v}^l; H P_{t|t-1}^{k,j} H^T + R^l)}{\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^p \rho_{t-1}^k \eta^j \gamma^l \Gamma(y_t - H \hat{x}_{t|t-1}^{k,j} - \bar{v}^l; H P_{t|t-1}^{k,j} H^T + R^l)}$$

4. Sélection des N filtres de Kalman de poids les plus élevés

$$\{\rho_t^{k,j,l}, k \in K, j \in J, l \in L\} \rightarrow \{\tilde{\rho}_t^k, k = 1 \dots N\}$$

et réaffectation des moyennes et matrices de covariances des filtres de Kalman

$$\{\hat{x}_{t|t}^{k,j,l}, P_{t|t}^{k,j,l}, k \in K, j \in J, l \in L\} \rightarrow \{\hat{x}_{t|t}^k, P_{t|t}^k, k = 1 \dots N\}$$

5. Renormalisation des poids :

$$\rho_t^k = \frac{\tilde{\rho}_t^k}{\sum_{k=1}^N \tilde{\rho}_t^k}$$

6. Retour en 2.

Extension aux systèmes non linéaires et/ou non gaussiens

Considérons à présent les systèmes non linéaires du type :

$$x_t = f(x_{t-1}) + g(x_{t-1}) w_t \quad (4.39a)$$

$$y_t = h(x_t) + v_t \quad (4.39b)$$

où w_t et v_t sont des bruits blancs éventuellement non gaussiens.

Si la condition initiale est telle que l'incertitude $\sqrt{P_{0|-1}}$ est trop importante, nous avons vu que sa décomposition en somme de densités gaussiennes pondérées

$$p(x_0) = \sum_{k=1}^N \rho_0^k \Gamma(x_0 - \bar{x}_0^k, P_0^k)$$

pouvait permettre de contourner le défaut de stabilité du filtre de Kalman étendu à condition que chaque écart type $\sqrt{P_0^k}$ satisfasse les conditions de validité de la linéarisation. En revanche, si le bruit de dynamique w_t possède une variance trop élevée vis à vis du domaine de validité de la linéarisation, l'utilisation d'un seul filtre de Kalman étendu associé à chaque densité $\Gamma(x_0 - \bar{x}_0^k, P_0^k)$ met en péril la stabilité du filtre. L'idée est donc de décomposer à nouveau la densité de probabilité du bruit dynamique comme une somme de densités gaussiennes pondérées

$$p(w_t) = \sum_{j=1}^m \eta^j \Gamma(w_t - \bar{w}^j; Q^j) \quad (4.40)$$

tel que chaque écart type $\sqrt{Q^j}$ soit suffisamment petit pour que les conditions nécessaires à la validité de la linéarisation soient vérifiées. A noter que l'effet de fortes variations de la fonction g peut être contrecarré par cette décomposition.

La densité de probabilité de transition s'écrit alors (voir 4.2.4) :

$$p(x_t|x_{t-1}) = \sum_{j=1}^m \eta^j \Gamma\left(x_t - f(x_{t-1}) - g(x_{t-1})\bar{w}^j; g(x_{t-1})Q^j\left(g(x_{t-1})^T\right)\right)$$

Si on considère, ce qui n'est pas toujours nécessaire, que la densité de probabilité du bruit d'observation s'écrit :

$$p(v_t) = \sum_{j=1}^p \gamma^j \Gamma(v_t - \bar{v}^j; R^j) \quad (4.41)$$

la densité de probabilité de l'observation s'écrit alors :

$$p(y_t|x_t) = \sum_{j=1}^p \gamma^j \Gamma(y_t - h(x_t) - \bar{v}^j; R^j)$$

Théorème 130. *Si, à l'instant $t - 1$, la densité de probabilité a posteriori du système 4.39 dont les perturbations sont définies comme des sommes pondérées de densités de probabilité gaussiennes (4.40 et 4.41) est une somme pondérée de N densités gaussiennes, alors, à l'instant t , l'approximation linéaire du modèle 4.39 conduit à l'approximation de la densité de probabilité a posteriori de ce système par une somme pondérée de $N \times m \times p$ densités gaussiennes.*

Preuve. Supposons qu'à l'instant $t - 1$ la mesure de probabilité a posteriori ai l'expression suivante :

$$p(x_{t-1}|y_{0:t-1}) = \sum_{k=1}^N \rho_{t-1}^k \Gamma(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}^k; P_{t-1|t-1}^k)$$

L'étape de prédiction (formule 3.19) conduit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} p(x_t|y_{0:t-1}) &= \sum_{k=1}^N \rho_{t-1}^k \int_{\mathbb{R}^n} p(x_t|x_{t-1}) \Gamma(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}^k; P_{t-1|t-1}^k) dx_{t-1} \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \rho_{t-1}^k \eta^j \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma\left(x_t - f(x_{t-1}) - g(x_{t-1})\bar{w}^j; g(x_{t-1})Q^j\left(g(x_{t-1})^T\right)\right) \\ &\quad \times \Gamma(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}^k; P_{t-1|t-1}^k) dx_{t-1} \end{aligned}$$

Si on fait la même approximation que celle suggérée dans le paragraphe décrivant le filtre de Kalman étendu (paragraphe 4.2.1), cette expression peut être approchée par l'expression suivante :

$$p(x_t|y_{0:t-1}) \simeq \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \rho_{t-1}^k \eta^j \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}^{k,j}; P_{t|t-1}^{k,j})$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t|t-1}^{k,j} &= f(\hat{x}_{t-1|t-1}^k) + g(\hat{x}_{t-1|t-1}^k) \bar{w}^j \\ P_{t|t-1}^{k,j} &= F_x(\hat{x}_{t-1|t-1}^k) P_{t-1|t-1}^k (F_x(\hat{x}_{t-1|t-1}^k))^T + g(\hat{x}_{t-1|t-1}^k) Q^j (g(\hat{x}_{t-1|t-1}^k))^T \end{aligned}$$

Ainsi, après prédiction, la représentation de la mesure de probabilité *a posteriori* comporte $N \times m$ mesures gaussiennes L'étape de correction s'écrit alors :

$$\begin{aligned} p(x_t|y_{0:t}) &\propto p(y_t|x_t) p(x_t|y_{0:t-1}) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^p \rho_{t-1}^k \eta^j \gamma^l \Gamma(y_t - h(x_t) - \bar{v}^l; R^l) \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}^{k,j}; P_{t|t-1}^{k,j}) \end{aligned}$$

L'approximation utilisée dans le filtre de Kalman étendu conduit alors à :

$$p(x_t|y_{0:t}) \propto \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^p \rho_{t-1}^k \eta^j \gamma^l \Gamma(y_t - h(\hat{x}_{t|t-1}^{k,j}) - \bar{v}^l; S_t^{k,j,l}) \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}^{k,j,l}; P_{t|t}^{k,j,l})$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t|t}^{k,j,l} &= \hat{x}_{t|t-1}^{k,j} + K_t^{k,j,l} (y_t - h(\hat{x}_{t|t-1}^{k,j}) - \bar{v}^l) \\ S_t^{k,j,l} &= H_x(\hat{x}_{t|t-1}^{k,j}) P_{t|t-1}^{k,j} (H_x(\hat{x}_{t|t-1}^{k,j}))^T + R^l \\ K_t^{k,j,l} &= H_x(\hat{x}_{t|t-1}^{k,j}) P_{t|t-1}^{k,j} (S_t^{k,j,l})^{-1} \\ P_{t|t}^{k,j,l} &= P_{t|t-1}^{k,j} - K_t^{k,j,l} (H_x(\hat{x}_{t|t-1}^{k,j})) P_{t|t-1}^{k,j} \end{aligned}$$

En définitive, après normalisation, on a ;

$$p(x_t|y_{0:t}) \simeq \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^p \rho_t^{k,j,l} \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}^{k,j,l}; P_{t|t}^{k,j,l})$$

avec :

$$\rho_t^{k,j,l} = \frac{\rho_{t-1}^k \eta^j \gamma^l \Gamma(y_t - h(\hat{x}_{t|t-1}^{k,j}) - \bar{v}^l; S_t^{k,j,l})}{\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^p \rho_{t-1}^k \eta^j \gamma^l \Gamma(y_t - h(\hat{x}_{t|t-1}^{k,j}) - \bar{v}^l; S_t^{k,j,l})}$$

Systèmes non-linéaires et/ou non gaussiens - Mélange de gaussiennes

1. Initialisation des densités gaussiennes en fixant $\{\rho_0^k, \bar{x}_0^k, P_0^k, k = 1 \dots N\}$

$$p(x_0) = \sum_{k=1}^N \rho_0^k \Gamma(x_0 - \bar{x}_{0|0}^k, P_{0|0}^k), \quad \sum_{k=1}^N \rho_0^k = 1$$

2. Calcul des $N \times m \times p$ filtres de Kalman étendus en parallèle : $\forall k = 1 \dots N, \forall j = 1 \dots m, \forall l = 1 \dots p$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t|t-1}^{k,j} &= f(\hat{x}_{t-1|t-1}^k) + g(\hat{x}_{t-1|t-1}^k) \bar{w}^j \\ P_{t|t-1}^{k,j} &= F_x(\hat{x}_{t-1|t-1}^k) P_{t-1|t-1}^k (F_x(\hat{x}_{t-1|t-1}^k))^T + g(\hat{x}_{t-1|t-1}^k) Q^j (g(\hat{x}_{t-1|t-1}^k))^T \\ \hat{x}_{t|t}^{k,j,l} &= \hat{x}_{t|t-1}^{k,j} + K_t^{k,j,l} (y_t - h(\hat{x}_{t|t-1}^{k,j}) - \bar{v}^l) \\ S_t^{k,j,l} &= H_x(\hat{x}_{t|t-1}^{k,j}) P_{t|t-1}^{k,j} (H_x(\hat{x}_{t|t-1}^{k,j}))^T + R^l \\ K_t^{k,j,l} &= H_x(\hat{x}_{t|t-1}^{k,j}) P_{t|t-1}^{k,j} (S_t^{k,j,l})^{-1} \\ P_{t|t}^{k,j,l} &= P_{t|t-1}^{k,j} - K_t^{k,j,l} (H_x(\hat{x}_{t|t-1}^{k,j})) P_{t|t-1}^{k,j} \end{aligned}$$

3. Calcul des $N \times m \times p$ termes de pondérations :

$$\rho_t^{k,j,l} = \frac{\rho_{t-1}^k \eta^j \gamma^l \Gamma(y_t - h(\hat{x}_{t|t-1}^{k,j}) - \bar{v}^l; S_t^{k,j,l})}{\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^p \rho_{t-1}^k \eta^j \gamma^l \Gamma(y_t - h(\hat{x}_{t|t-1}^{k,j}) - \bar{v}^l; S_t^{k,j,l})}$$

4. Sélection des N filtres de Kalman étendu de poids les plus élevés

$$\{\rho_t^{k,j,l}, k \in K, j \in J, l \in L\} \rightarrow \{\tilde{\rho}_t^k, k = 1 \dots N\}$$

et réaffectation des moyennes et matrices de covariances des filtres de Kalman étendu

$$\{\hat{x}_{t|t}^{k,j,l}, P_{t|t}^{k,j,l}, k \in K, j \in J, l \in L\} \rightarrow \{\hat{x}_{t|t}^k, P_{t|t}^k, k = 1 \dots N\}$$

5. Renormalisation des poids :

$$\rho_t^k = \frac{\tilde{\rho}_t^k}{\sum_{k=1}^N \tilde{\rho}_t^k}$$

6. Retour en 2.

Remarque 131. En pratique, il est rare que le bruit d'observation doive être décomposé comme une somme de densités gaussiennes. Très souvent, les capteurs, construits par l'ingénieur, ont des perturbations de type gaussien.

Remarque 132. Le choix de la décomposition du bruit de dynamique est dicté par la nature des non linéarités. En effet, il peut arriver que dans une direction donnée de l'espace d'état, le

système soit linéaire ou "presque" linéaire. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de décomposer la distribution du bruit dans cette direction.

Espace d'état hybride

Examinons, dans un premier temps, le cas des système hybrides linéaires à perturbations gaussiennes, cas particulier des systèmes présentés au paragraphe 2.3.5 . Leur modèle d'état s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x_t &= F_{s_t} x_{t-1} + G_{s_t} w_t \\ y_t &= H_{s_t} x_t + D_{s_t} v_t \end{aligned} \quad (4.42)$$

où w_t et v_t sont des bruits blancs gaussiens de covariances Q et R respectivement. L'état discret $s_t \in \{1, \dots, m\}$ est markovien et ses transitions sont mesurée par l'ensemble $\{p(s_t|s_{t-1}) \triangleq P[s_t = i|s_{t-1} = j], \forall i, j = 1 \dots m\}$. Comme le système est linéaire-gaussien, la probabilité de transition de l'état est gaussienne et :

$$p(x_t|x_{t-1}, s_{t-1}) = \Gamma(x_t - F_{s_t} x_{t-1}, G_{s_t} Q (G_{s_t})^T)$$

La probabilité de la mesure s'écrit :

$$p(y_t|x_t, s_t) = \Gamma(y_t - H_{s_t} x_t, D_{s_t} R (D_{s_t})^T)$$

Supposons qu'à l'instant $t-1$, la probabilité $p(x_{t-1}, s_{t-1}|y_{0:t-1})$ soit représentée, pour tout s_{t-1} , comme une somme pondérée de $N_{s_{t-1}}$ densités gaussiennes :

$$p(x_{t-1}, s_{t-1}|y_{0:t-1}) = \sum_{k=1}^{N_{s_{t-1}}} \rho_{t-1}^{k, s_{t-1}} \Gamma(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}^{k, s_{t-1}}, P_{t-1|t-1}^{k, s_{t-1}}), \forall s_{t-1} = 1 \dots m$$

où, pour assurer la normalisation de cette probabilité, on a la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^{N_{s_{t-1}}} \sum_{s_{t-1}=1}^m \rho_{t-1}^{k, s_{t-1}} = 1$$

Pour réaliser l'étape de prédiction, il suffit d'appliquer la formule ?? . On obtient l'expression suivante :

$$p(x_t, s_t|y_{0:t-1}) = \sum_{k=1}^{N_{s_{t-1}}} \sum_{s_{t-1}=1}^m p(s_t|s_{t-1}) \rho_{t-1}^{k, s_{t-1}} \int_{\mathbb{R}^n} p(x_t|x_{t-1}, s_t) \Gamma(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}^{k, s_{t-1}}, P_{t-1|t-1}^{k, s_{t-1}}) dx_{t-1}$$

Or, la probabilité conditionnelle $p(x_t|x_{t-1}, s_t)$ étant gaussienne, en vertu du corollaire ?? , la pseudo-convolution donne à nouveau une probabilité gaussienne

$$p(x_t, s_t|y_{0:t-1}) = \sum_{k=1}^{N_{s_{t-1}}} \sum_{s_{t-1}=1}^m p(s_t|s_{t-1}) \rho_{t-1}^{k, s_{t-1}} \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}^{k, s_t, s_{t-1}}, P_{t|t-1}^{k, s_t, s_{t-1}})$$

où :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t|t-1}^{k, s_t, s_{t-1}} &= F_{s_t} \hat{x}_{t-1|t-1}^{k, s_{t-1}} \\ P_{t|t-1}^{k, s_t, s_{t-1}} &= F_{s_t} P_{t-1|t-1}^{k, s_{t-1}} F_{s_t}^T + G_{s_t} Q G_{s_t}^T \end{aligned}$$

Ceci revient donc à calculer, pour chaque couple $\hat{x}_{t-1|t-1}^{k,s_{t-1}}, P_{t-1|t-1}^{k,s_{t-1}}$, le prédicteur du filtre de Kalman du modèle linéaire 4.42 paramétré par l'état discret s_t .

Concernant l'étape de correction, la formule ?? donne :

$$p(x_t, s_t | y_{0:t}) \propto \sum_{k=1}^{N_{s_{t-1}}} \sum_{s_{t-1}=1}^m p(s_t | s_{t-1}) \rho_{t-1}^{k,s_{t-1}} \Gamma(y_t - H_{s_t} x_t, D_{s_t} R (D_{s_t})^T) \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t-1}^{k,s_t,s_{t-1}}, P_{t|t-1}^{k,s_t,s_{t-1}})$$

En appliquant le théorème 40, le produit des densités gaussiennes peut-être récrit :

$$\begin{aligned} & p(x_t, s_t | y_{0:t}) \\ & \propto \sum_{k=1}^{N_{s_{t-1}}} \sum_{s_{t-1}=1}^m p(s_t | s_{t-1}) \rho_{t-1}^{k,s_{t-1}} \Gamma(y_t - H_{s_t} \hat{x}_{t|t-1}^{k,s_t,s_{t-1}}, H_{s_t} P_{t|t-1}^{k,s_t,s_{t-1}} H_{s_t}^T + D_{s_t} R (D_{s_t})^T) \\ & \quad \times \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}^{k,s_t,s_{t-1}}, P_{t|t}^{k,s_t,s_{t-1}}) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t|t}^{k,s_t,s_{t-1}} &= \hat{x}_{t|t-1}^{k,s_t,s_{t-1}} + K_t^{k,s_t,s_{t-1}} (y_t - H_{s_t} \hat{x}_{t|t-1}^{k,s_t,s_{t-1}}) \\ \Sigma_t^{k,s_t,s_{t-1}} &= H_{s_t} P_{t|t-1}^{k,s_t,s_{t-1}} H_{s_t}^T + D_{s_t} R (D_{s_t})^T \\ K_t^{k,s_t,s_{t-1}} &= P_{t|t-1}^{k,s_t,s_{t-1}} H_{s_t}^T (\Sigma_t^{k,s_t,s_{t-1}})^{-1} \\ P_{t|t}^{k,s_t,s_{t-1}} &= P_{t|t-1}^{k,s_t,s_{t-1}} - K_t^{k,s_t,s_{t-1}} \Sigma_t^{k,s_t,s_{t-1}} (K_t^{k,s_t,s_{t-1}})^T \end{aligned}$$

Ce calcul correspond aux formules de correction du filtre de Kalman quand le système passe du modèle s_{t-1} au modèle s_t .

A ce stade, on constate qu'à l'instant t la probabilité conditionnelle s'écrit comme la somme pondérée de $N \times m$ gaussiennes comme suit :

$$p(x_t, s_t | y_{0:t}) = \sum_{k=1}^{N_{s_{t-1}}} \sum_{s_{t-1}=1}^m \rho_t^{k,s_t,s_{t-1}} \Gamma(x_t - \hat{x}_{t|t}^{k,s_t,s_{t-1}}, P_{t|t}^{k,s_t,s_{t-1}})$$

avec :

$$\rho_t^{k,s_t,s_{t-1}} = \frac{p(s_t | s_{t-1}) \rho_{t-1}^{k,s_{t-1}} \Gamma(y_t - H_{s_t} \hat{x}_{t|t-1}^{k,s_t,s_{t-1}}, H_{s_t} P_{t|t-1}^{k,s_t,s_{t-1}} H_{s_t}^T + D_{s_t} R (D_{s_t})^T)}{\sum_{k=1}^{N_{s_{t-1}}} \sum_{s_{t-1}=1}^m p(s_t | s_{t-1}) \rho_{t-1}^{k,s_{t-1}} \Gamma(y_t - H_{s_t} \hat{x}_{t|t-1}^{k,s_t,s_{t-1}}, H_{s_t} P_{t|t-1}^{k,s_t,s_{t-1}} H_{s_t}^T + D_{s_t} R (D_{s_t})^T)}$$

De fait, le filtre envisage toutes les transitions possibles de s_{t-1} à s_t et pondère le résultat conformément à la probabilité de cette transition et à la vraisemblance de l'observation. Il est clair que la mise en oeuvre pratique d'un tel algorithme en l'état n'est pas envisageable, le nombre de paramètres grandissant exponentiellement avec le temps (m^t). Pour pallier cette explosion numérique, on peut être amené à concéder quelques approximations. En particulier, on peut chercher à faire en sorte que le nombre de densités gaussiennes soit fixe ou borné.

Algorithme "Multiples Modèles Interactifs"

Développé dans [11], cette technique préconise de regrouper la somme de densités gaussiennes dérivée pour chaque valeur de s_t en une seule gaussienne de mêmes poids, moyenne et

variance. Ce regroupement peut-être réalisé à plusieurs niveaux de l'algorithme. Par exemple, partant, à l'instant $t - 1$, de la représentation suivante :

$$p(x_{t-1}, s_{t-1} | y_{0:t-1}) = \rho_{t-1}^{s_{t-1}} \Gamma(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}}, P_{t-1|t-1}^{s_{t-1}}), \forall s_{t-1} = 1 \dots m$$

après prédiction de s_t , on obtient :

$$p(x_{t-1}, s_t | y_{0:t-1}) = \sum_{s_{t-1}=1}^m p(s_t | s_{t-1}) \rho_{t-1}^{s_{t-1}} \Gamma(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}}, P_{t-1|t-1}^{s_{t-1}}) \quad (4.43)$$

On remplace alors cette somme de gaussiennes par :

$$p(x_{t-1}, s_t | y_{0:t-1}) \simeq \rho_t^{s_t} \Gamma(x_{t-1} - \bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t}, \bar{P}_{t-1|t-1}^{s_t}) \quad (4.44)$$

Pour que l'identité des poids soit assurée, il suffit d'imposer que les densités 4.43 et 4.44 aient la même norme en intégrant celles-ci par rapport à x_{t-1} . On obtient alors :

$$\rho_t^{s_t} = \sum_{s_{t-1}=1}^m p(s_t | s_{t-1}) \rho_{t-1}^{s_{t-1}}$$

Pour assurer que les deux densités aient même moyenne, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} x_{t-1} \sum_{s_{t-1}=1}^m p(s_t | s_{t-1}) \rho_{t-1}^{s_{t-1}} \Gamma(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}}, P_{t-1|t-1}^{s_{t-1}}) dx_{t-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} x_{t-1} \rho_t^{s_t} \Gamma(x_{t-1} - \bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t}, \bar{P}_{t-1|t-1}^{s_t}) dx_{t-1} \end{aligned}$$

qui conduit à :

$$\sum_{s_{t-1}=1}^m p(s_t | s_{t-1}) \rho_{t-1}^{s_{t-1}} \hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}} = \bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t} \rho_t^{s_t}$$

Soit :

$$\bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t} = \frac{\sum_{s_{t-1}=1}^m p(s_t | s_{t-1}) \rho_{t-1}^{s_{t-1}} \hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}}}{\rho_t^{s_t}}$$

Enfin, pour que les deux densités aient mêmes variances, il suffit que :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} (x_{t-1} - \bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t}) (x_{t-1} - \bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t})^T \sum_{s_{t-1}=1}^m p(s_t | s_{t-1}) \rho_{t-1}^{s_{t-1}} \Gamma(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}}, P_{t-1|t-1}^{s_{t-1}}) dx_{t-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (x_{t-1} - \bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t}) (x_{t-1} - \bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t})^T \rho_t^{s_t} \Gamma(x_{t-1} - \bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t}, \bar{P}_{t-1|t-1}^{s_t}) dx_{t-1} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Partant de la définition de la variance d'une densité gaussienne :

$$P_{t-1|t-1}^{s_{t-1}} = \int_{\mathbb{R}^n} (x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}}) (x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}})^T \Gamma(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}}, P_{t-1|t-1}^{s_{t-1}}) dx_{t-1}$$

on déduit immédiatement que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_{t-1} x_{t-1}^T \Gamma(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}}, P_{t-1|t-1}^{s_{t-1}}) dx_{t-1} = P_{t-1|t-1}^{s_{t-1}} + \hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}} (\hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}})^T$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} \left(x_{t-1} - \bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t} \right) \left(x_{t-1} - \bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t} \right)^T \Gamma \left(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}}, P_{t-1|t-1}^{s_{t-1}} \right) dx_{t-1} \\
&= P_{t-1|t-1}^{s_{t-1}} + \hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}} \left(\hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}} \right)^T - \bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t} \left(\hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}} \right)^T - \hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}} \left(\bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t} \right) + \bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t} \left(\bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t} \right)^T \\
&= P_{t-1|t-1}^{s_{t-1}} + \left(\hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}} - \bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t} \right) \left(\hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}} - \bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t} \right)^T
\end{aligned}$$

L'égalité 4.45 peut alors être réécrite :

$$\sum_{s_{t-1}=1}^m p(s_t|s_{t-1}) \rho_{t-1}^{s_{t-1}} \left(P_{t-1|t-1}^{s_{t-1}} + \left(\hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}} - \bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t} \right) \left(\hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}} - \bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t} \right)^T \right) = \rho_t^{s_t} \bar{P}_{t-1|t-1}^{s_t}$$

qui conduit à :

$$\bar{P}_{t-1|t-1}^{s_t} = \frac{\sum_{s_{t-1}=1}^m p(s_t|s_{t-1}) \rho_{t-1}^{s_{t-1}} \left(P_{t-1|t-1}^{s_{t-1}} + \left(\hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}} - \bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t} \right) \left(\hat{x}_{t-1|t-1}^{s_{t-1}} - \bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t} \right)^T \right)}{\rho_t^{s_t}}$$

Si on applique alors la phase de prédiction sur la variable x_t , on obtient :

$$p(x_t, s_t | y_{0:t-1}) \simeq \rho_t^{s_t} \Gamma \left(x_t - \hat{x}_{t|t-1}^{s_t}, P_{t|t-1}^{s_t} \right)$$

où :

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{t|t-1}^{s_t} &= F_{s_t} \bar{x}_{t-1|t-1}^{s_t} \\
P_{t|t-1}^{s_t} &= F_{s_t} \bar{P}_{t-1|t-1}^{s_t} (F_{s_t})^T + G_{s_t} Q G_{s_t}^T
\end{aligned}$$

La correction donne alors :

$$p(x_t, s_t | y_{0:t-1}) \simeq \rho_t^{s_t} \Gamma \left(y_t - H_{s_t} \hat{x}_{t|t-1}^{s_t}, H_{s_t} P_{t|t-1}^{s_t} H_{s_t}^T + D_{s_t} R (D_{s_t})^T \right) \Gamma \left(x_t - \hat{x}_{t|t}^{s_t}, P_{t|t}^{s_t} \right)$$

avec :

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{t|t}^{s_t} &= \hat{x}_{t|t-1}^{s_t} + K_t^{s_t} \left(y_t - H_{s_t} \hat{x}_{t|t-1}^{s_t} \right) \\
\Sigma_t^{s_t} &= H_{s_t} P_{t|t-1}^{s_t} H_{s_t}^T + D_{s_t} R (D_{s_t})^T \\
K_t^{s_t} &= P_{t|t-1}^{s_t} H_{s_t}^T (\Sigma_t^{s_t})^{-1} \\
P_{t|t}^{s_t} &= P_{t|t-1}^{s_t} - K_t^{s_t} \Sigma_t^{s_t} (K_t^{s_t})^T
\end{aligned}$$

Algorithme à sélection

Un autre approche possible pour palier l'explosion combinatoire du nombre de densités gaussiennes consiste à sélectionner à chaque étape un nombre fixé N de densités gaussiennes en ne retenant que celles de poids les plus élevés. Supposons qu'à l'instant $t - 1$ la densité de probabilité de l'état hybride soit représentée par la somme de $N_{s_{t-1}}$ densités gaussiennes suivante :

$$p(x_{t-1}, s_{t-1} | y_{0:t-1}) = \sum_{k=1}^{N_{s_{t-1}}} \rho_{t-1}^{k, s_{t-1}} \Gamma \left(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}^{k, s_{t-1}}, P_{t-1|t-1}^{k, s_{t-1}} \right), \forall s_{t-1} = 1 \dots m$$

Le nombre total de densités gaussiennes utilisé est alors égal à :

$$N = m \sum_{s_{t-1}=1}^m N_{s_{t-1}}$$

A l'instant t , après phases de prédiction et correction, la densité de probabilité devient :

$$p(x_t, s_t | y_{0:t}) = \sum_{k=1}^{N_{s_{t-1}}} \sum_{s_{t-1}=1}^m \rho_t^{k, s_t, s_{t-1}} \Gamma\left(x_t - \hat{x}_{t|t}^{k, s_t, s_{t-1}}, P_{t|t}^{k, s_t, s_{t-1}}\right)$$

et le nombre total de gaussiennes utilisée devient :

$$m^2 \sum_{s_{t-1}=1}^m N_{s_{t-1}}$$

Dans cet ensemble, on décide de ne retenir que les N densités gaussiennes de poids les plus élevés. Ceci conduit à une nouvelle répartition des densités et à une nouvelle valeur du nombre N_{s_s} de gaussiennes consacrées à représenter l'état discret s_t . A noter que pour certaines valeurs de s_t , ce nombre peut devenir nul. Après sélection, la densité de probabilité conditionnelle s'écrit :

$$p(x_t, s_t | y_{0:t}) = \sum_{k=1}^{N_{s_t}} \rho_t^{k, s_t} \Gamma\left(x_t - \hat{x}_{t|t}^{k, s_t}, P_{t|t}^{k, s_t}\right)$$

où les nouveaux poids ρ_t^{k, s_t} sont renormalisés afin d'assurer que :

$$\sum_{k=1}^{N_{s_t}} \sum_{s_t=1}^m \rho_t^{k, s_t} = 1$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] William Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, John Wiley Sons, 1971.
- [2] Thomas L. Vincent and Walter J. Grantham, *Nonlinear And Optimal Control Systems*, John Wiley Sons, Inc., New York, 1997.
- [3] R. L. Stratonovich, “A new form of representing stochastic integrals equations”, *Journal SIAM Control*, vol. 4, pp. 362–371, 1966.
- [4] R Hermann, *On the Accessibility Theorem in Control Theory - Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, Academic Press, 1963.
- [5] R Hermann and A J Krener, “Nonlinear controlability and observability”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 22, no. 5, 1977.
- [6] F Albertini and D D’Alessandro, “Observability and forward-backward observability of discrete-time nonlinear systems”, *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 15, no. 4, pp. 275–290, 2002.
- [7] W F Denham and Pines S, “Sequential estimation when measurement function nonlinearity is comaprable to measurement error”, *AIAA Journal*, vol. 4, pp. 1071–1076, 1966.
- [8] R S Bucy and K D Senne, “Digital synthesis of non-linear filters”, *Automatica*, vol. 7, pp. 287–298, 1971.
- [9] H W Sorenson and D L Alspach, “Recursive Bayesian estimation using Gaussian sums”, *Automatica*, vol. 7, pp. 465–479, 1971.
- [10] D L Alspach and H W Sorenson, “Nonlinear Bayesian estimation using Gaussian sum approximation”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 17, no. 4, pp. 439–448, 1972.
- [11] Henk A P Blom and Yaakov Bar-Shalom, “The interacting multiple model algorithm for systems with Markovian switching coefficients”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, no. 8, pp. 780–783, 1988.